МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130–2221
2006 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Кирпичики

Оригинальную головоломку придумали известные изобретатели игрушек Владимир Красноухов и Ирина Новичкова. В ней всего шесть деталей, которые нужно плотно уложить в коробочку. Детали разные, но изготовить их в домашних условиях очень просто.

От длинного бруска квадратного сечения отрежьте двенадцать одинаковых заготовок размером 1 х 1 х 2 и с одной стороны каждого брусочка сделайте косой срез, удалив 1/4 объема. Полученные детали склейте попарно шестью разными способами, как показано на фотографии. У вас окажется шесть элементов, которые можно стыковать друг с другом и получать “кирпичики” размером 3 х 2 х 1 (отсюда и название головоломки). Остается склеить бумажную или картонную коробочку размером 3 х 3 х 2 – и можно приступать к решению.

Очень скоро вы поймете, что из имеющихся деталей три целых кирпичика 3 х 2 х 1 сложить невозможно. Следовательно, нужно укладывать в коробочку их половинки. Здесь вы столкнетесь с проблемой “последней детали” – пять половинок поместились, имеется свободный объем для шестой, но он не той конфигурации или ему мешают ранее уложенные части.

Секрет в том, что головоломку следует решать без коробочки, а туда помещать бруски все сразу в сложенном виде.

А.Калинин

Журнал© Квант

МАЙ ИЮНЬ 2006 №3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Тупость и гений

А.АЛЕКСАНДРОВ

Оглянемся теперь на историю пятого постулата Евклида. Лобачевский сказал о ней: «Напрасные старанья… в продолжение двух тысяч лет». Но какие старанья! Множество математиков расточает их, и каких математиков! Среди них знаменитейшие имена: попытки открываются, возможно, Архимедом, проходят через Омара Хайяма и подходят к завершению с Гауссом.

Попытки доказать пятый постулат были, как мы выяснили раньше, совершенно естественными. Но 2000 лет никто не догадывался, что доказательство невозможно. Никто не мог подумать, что возможна какая-то геометрия, отличная от привычной евклидовой. Ее неразрывная связь с нашим пространственным опытом и наглядным представлением, ее логическое совершенство и прозрачность, вековые традиции ее изучения и, можно сказать, исповедания – все это делало геометрию Евклида непререкаемой, как бы абсолютно необходимой, присущей и миру и разуму. Ее происхождение из практики затмевалось совершенством и ясностью ее логики. И дошло, наконец, до того, что в 1781 году великий философ Кант в своей «Критике чистого разума» счел геометрию априорной – независимой от опыта – и основал на этом вывод об априорности самого пространства, которое для него не форма, присущая миру, а только форма нашего восприятия, форма «наглядного созерцания».

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №2.

Гений

Но как раз в это же время из попыток доказать пятый постулат стали пробиваться первые проблески сомнений. Уже в 1766 году у Ламберта брезжит мысль, что отрицание пятого постулата «имеет место на какой-то мнимой сфере», что, может быть, странные выводы, к которым приводит это отрицание,– не бессмыслица. Напряжение нарастает. Кантовское «априори» распространяется в умах, особенно после второго издания его «Критики» в 1787 году.

Но труд Ламберта выходит в 1786 году. Затем из столь же упорных, как и безуспешных попыток доказать пятый постулат, в первой четверти XIX века прорастает, наконец, общая мысль о том, что, возможно, мыслима геометрия, отличная от евклидовой. Почти одновременно, хотя и с разной степенью определенности и ясности, эта идея появляется у нескольких человек – у Швейкарта, Тауринуса, Гаусса, Лобачевского и Больяйи.

Дойти до мысли, опровергающей привычное, может быть само по себе гениальным. Но это еще не наука, а только идея. Наука же требует претворения идеи в

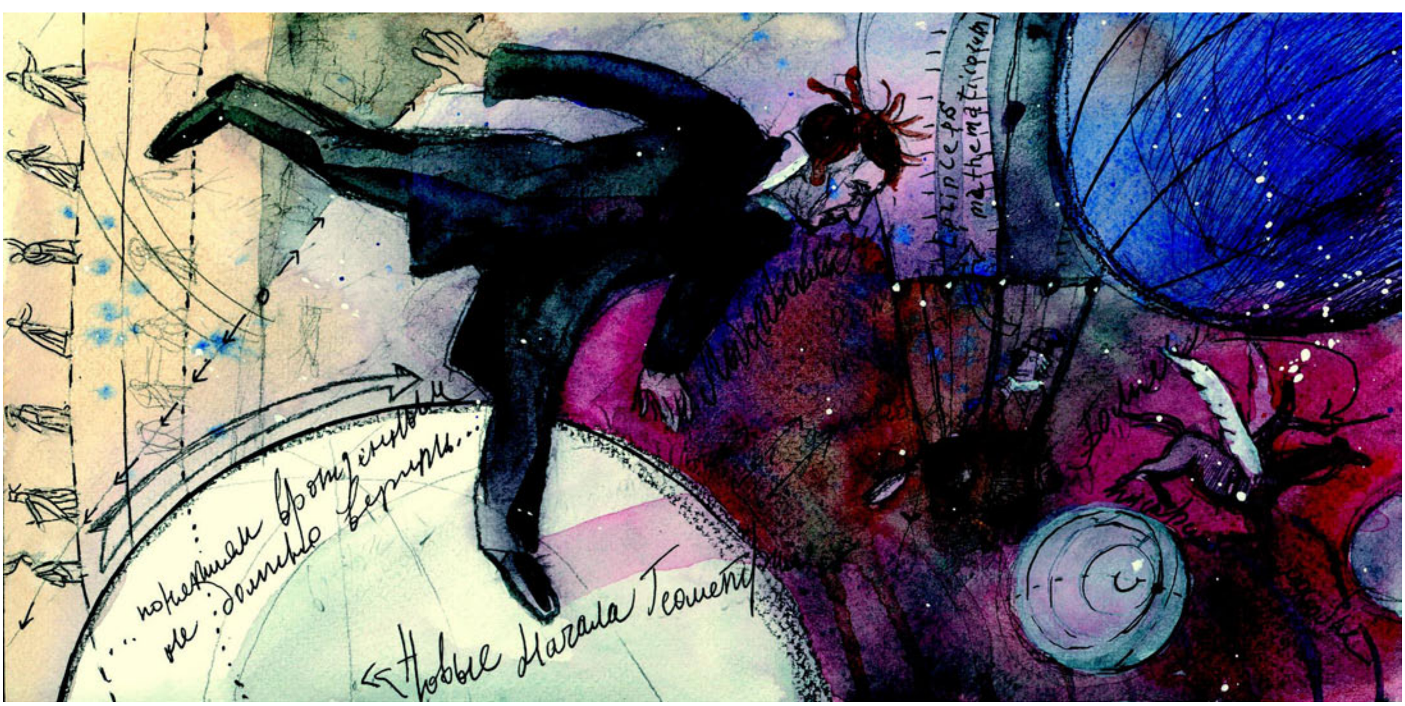


Иллюстрация Н.Суворовой

теории, как инженерия – претворения идеи в предмете, в осуществленном изобретении.

Гений – не только полет мысли, но также ее упорство – труд, приподнятый вдохновением, и вдохновение, подкрепленное трудом. Так, Коперник не только выразил мысль, что не Земля, а Солнце – в центре (мысль, кстати сказать, не новую: ее выразил еще в III века до н.э. Аристарх Самосский), но и построил «систему Коперника» – дал точное описание движения планет вокруг Солнца, согласное с наблюдениями. Точно так же Лобачевский не только выразил убеждение в возможности неевклидовой геометрии, но и построил эту геометрию. И как от Коперника пошло новое развитие астрономии, дошедшее до современного взгляда на Вселенную с множеством «миров» – планетных систем, галактик и пр., так от Лобачевского пошло новое развитие геометрии, приведшее к созданию множества разнообразных «геометрий», самых разных геометрических теорий «воображаемых» пространств – топологических, римановых, финслеровых, расслоенных... – «им же несть числа». Недаром, когда в 60–70 годы XIX века начал во всю силу разворачиваться этот пошедший с Лобачевского процесс преобразования геометрии, Лобачевский был назван «Коперником геометрии». Нельзя, конечно, забывать, что новую геометрию развил и обнародовал также Больяйи, но преимущество отдается Лобачевскому, потому что он сделал это раньше и потом еще существенно продолжил свои исследования и публикации.

Лобачевский утверждался в мысли о недоказуемости пятого постулата и о возможности неевклидовой геометрии, исходя из философских, теоретико-познавательных убеждений. Это выражено уже в приведенных ранее (в первой части статьи) его словах из предисловия к «Новым началам геометрии...». «Истина, которую хотели доказывать», т.е. пятый постулат, не заключается «в самих понятиях», а в применении к реальному пространству и подлежит проверке опытом, как физический закон. Этим отрицается кантовское «априори»: геометрия не независима от опыта, а подлежит проверке опытом.[1] В других сочинениях Лобачевский явно возражал против кантианства в общей форме, когда писал, например, что «понятия приобретаются опытом... врожденным не должно верить».

Кстати, это стоит заметить научным снобам, полагающим, будто ни им, ни науке вообще не нужно философское мышление. Все великие ученые от Ньютона и Галилея, если говорить лишь о новом времени, были философскими мыслителями. Без философии наука не развивается: проложение новых ее путей, когда они не оформились, и есть философское движение мысли. Вопрос только в том – какая это философия, связывается ли она с точной логикой и фактами опыта или с пребывающими в безвоздушном пространстве общими фразами априорности и чистого спекулятивного мышления. Галилей, Ньютон, Лобачевский не только высказывали философские суждения, но и, отправляясь от общих убеждений, строили здания научных теорий – прочные основания целых обширных областей науки.

Появление неевклидовой геометрии было началом революционного преобразования геометрии. Но так же, что характерно для революции, вместе с назреванием ее сил росла и реакция. Именно тогда, когда открытие новой геометрии уже приближалось, появилась философия Канта с ее учением об априорности геометрии, о пространстве как априорной форме созерцания. Любая другая геометрия, кроме той, которая присуща этой форме созерцания, казалась немыслимой. Лобачевский явно выступает против этих воззрений. Появление новой геометрии опровергает их и открывает неведомые, немыслимые раньше пути развития науки – революция совершается.

Гений – это революция, революция – это гений в действии.

Тупость

Как история пятого постулата и неевклидовой геометрии демонстрирует человеческий гений, так демонстрирует она и неповоротливость ума, если избегать грубого слова «тупость».

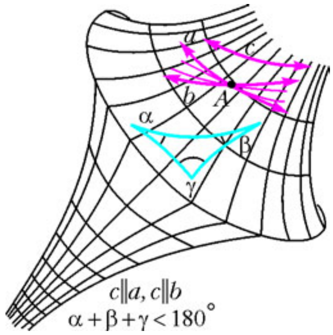
Начать с того, что множество попыток доказать пятый постулат было основано на ошибках. Авторам этих доказательств только казалось, что они нашли доказательство. Так было даже в начале XIX века. Только немногие понимали, что опираются на дополнительные предположения, равносильные пятому постулату, и явно их формулировали. Ошибки были психологически обусловлены тем, что автору очень хотелось пятый постулат доказать, отказ от него был невообразимым, а положение, принятое открыто, на которое автор опирался, казалось само собою очевидным и ускользало от того, чтобы его явно формулировать.

Очень характерен пример Саккери: при всей глубине и тонкости его выводов, относящихся к неевклидовой геометрии, он в конце все же заключает, что ему удалось «вырвать с корнем» гипотезу, отрицающую пятый постулат, и очистить Евклида от пятен. И Ламберт, далеко развивший неевклидову геометрию, только «почти» сделал вывод о ее выполнимости, и Гаусс мучительно долго «все более приходил» к убеждению о невозможности доказать пятый постулат.

Когда же неевклидова геометрия была открыта и обнародована и встал вопрос о ее реальном смысле, то тут несообразительность показала себя в полную силу.

Гаусс еще в 1827 году развил основы общей теории геометрии на поверхностях, в которой роль прямолинейных отрезков играют кратчайшие линии, расположенные на поверхности. У него был получен, в частности, вывод, что на некоторых поверхностях (поверхно-

[1] *Собственно говоря, слово «геометрия» должно пониматься двояко: как чисто математическая теория и как теория реальных пространственных отношений. В этом втором качестве она подлежит проверке опытом (современная физика доказала, что наше пространство не является точно евклидовым). Но от чисто математической теории самой по себе требуется логическая стройность прежде всего и обязательно непротиворечивость. В таком виде та или иная геометрия – это совокупность предложений, выводимых из принятых посылок. А какие она находит приложения – это ее саму по себе не затрагивает.*



стях отрицательной кривизны) сумма углов треугольника (стороны которого кратчайшие линии) меньше 180° (см. рисунок). Он знал вместе с тем, что в неевклидовой геометрии верно то же. Но он не сопоставил эти два вывода, не догадался, что неевклидова геометрия должна осуществляться на некоторых поверхностях. Если бы он додумался до этого, то доказательство не представляло бы для него, при его исключительной силе математика, особого труда (этот вывод был получен итальянским математиком Бельтрами только 40 лет спустя).

Вероятно, мысли Гаусса в неевклидовой геометрии, с одной стороны, и в теории поверхностей, с другой, шли как бы параллельно, не пересекаясь. Явление довольно обычное. Людям сплошь и рядом не приходит в голову сопоставить вещи, которые кажутся совершенно различными, но при ближайшем рассмотрении оказываются тесно связанными или даже совпадающими. Так бывает у одного человека, когда он знает обе «вещи», но не сопоставляет их. Так же бывает и в группе людей, когда одни знают одно, другие – другое, да не сопоставляют.

Именно так и было дальше с неевклидовой геометрией и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Миндинг, найдя формулы тригонометрии на этих поверхностях, – а они такие же, как в геометрии Лобачевского, – не заметил этого, хотя работа Лобачевского была уже опубликована двумя годами раньше в том же журнале. Да и Лобачевский, который как геометр-профессионал мог бы прочитать работу Миндинга, не сделал этого сопоставления. Так путешественники, подошедшие к горному хребту или подплывшие к острову с разных сторон, могут не сообразить, что открыли одно и то же.

Работу Миндинга развил в 1857 году Кодацци, но и он не сообразил сопоставить свои выводы с неевклидовой геометрией. Да он, возможно, о ней и не знал, хотя часть работ Лобачевского была опубликована по-французски и по-немецки, а работа Больяйи еще в 1832 году вышла на латинском языке.

И только в 1868 году Бельтрами, отправляясь от работ Миндинга и Кодацци, делает, наконец, нужное сопоставление и подробно доказывает, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется геометрия Лобачевского.

В промежутке, в 1859 году, Кэли создает теорию расстояния, содержащую модель геометрии Лобачевского, но не понимает этого, так как не сопоставляет свою теорию с этой геометрией. Хотя позже, в 1861 году, он публикует работу по геометрии Лобачевского.

Только в 1871 году Клейн делает это сопоставление – приходит к той простой модели в круге, о которой мы рассказали вначале. Указанием на эту элементарную модель решается вопрос о недоказуемости пятого постулата. Вот к чему, можно сказать, свелось то, над чем более 2000 лет бились умы математиков!

История неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди доходят до вещей, которые, когда они наконец ухвачены и понятны, оказываются простыми, и как люди зачастую не понимают, что делают и что лежит у них под руками. Ни Гаусс, ни Лобачевский не поняли то, что было у них почти в руках.

В наше время все еще находятся люди, занимающиеся «доказательством» пятого постулата и осаждающие математиков этими своими «трудами». Но так как вопрос о пятом постулате решен и решение это с помощью модели в круге нетрудно понять каждому, названные «доказательства» и «труды» относятся уже не к неповоротливости ума, а к глупости или даже к сфере медицины. Глупость – это совсем не то, что тупость – неповоротливость ума; напротив, у дурака может быть «легкость в мыслях необыкновенная», ум его может поворачиваться с головокружительной быстротою, да без толку. Это не имеет никакого отношения к той неповоротливости ума, свойственной даже гениям, которую так ярко показывает трудная история пятого постулата и неевклидовой геометрии.

Характер

Гаусс, Больяйи, Лобачевский – три математика, открывших неевклидову геометрию. Три человека – три характера.

Фридрих Гаусс – математик чрезвычайной силы, о котором говорят «великий Гаусс», «princeps mathematicorum» (т.е. король математиков), «старшина математиков». Но Гауссу при всей его математической силе была свойственна интеллектуальная осторожность, нерешительность, которая проявилась, в частности, в том, что он более 30 лет занимался теорией параллельных, прежде чем решился выразить даже самому себе и в частных письмах твердое убеждение в правомерности неевклидовой геометрии. Дальше следовала уже иная осторожность – трусость, которая не дала ему выступить со своими выводами.

Полной противоположностью Гауссу предстает перед нами Янош Больяйи – самый молодой из трех: когда он додумался до неевклидовой геометрии, ему было всего 23 года (соответственно, Гауссу – 47, Лобачевскому – 31). Лобачевский выступает публично в 32 года, Больяйи – в 30, Гаусс – никогда. Работа Больяйи по неевклидовой геометрии написана блестяще, разве что уж слишком кратко. Блеск его таланта соответствовал остальным чертам его пылкой натуры. Он был гусарский офицер, один из знаменитых венгерских гусаров, дуэлянт. Как-то ему пришлось встретиться в дуэли на шпагах с несколькими противниками; схватки следовали одна за другой, и он оговорил себе право в перерывах играть на скрипке, чтобы восстановить гибкость кисти. Он приколол (не до смерти) всех своих противников.

Но гусарское самолюбие погубило Больяйи. Не тем, что его самого убили на дуэли, а тем, что это самолюбие распространялось у него в область математики.

Гаусс прислал его отцу, своему старому знакомому, положительный отзыв о работе Яноша, написав, что очень хвалить его достижения не может, так как этим он хвалил бы сам себя, потому что те же результаты известны ему давно. Янош же решил, что Гаусс попросту присвоил себе его открытия. Позже, когда появился немецкий перевод одной из книг Лобачевского, он решил, что под псевдонимом Лобачевского скрывается Гаусс, укравший его, Больяйи, результаты. Кроме открытия неевклидовой геометрии, Больяйи выполнил еще одну работу по математике, где содержались идеи, опережавшие его время, но не достаточно тщательно оформленную. В последние годы жизни сознание его помрачилось. Он умер в 1860 году, на 58 году жизни.

Лобачевский решительно отличался от Гаусса и от Больяйи, соединяя смелость с упорством и основательностью, силу теоретической мысли с силой воли. Его открытие не встретило признания, его считали даже немного сумасшедшим, как говорил о нем, например, Чернышевский. Признание, идущее от Гаусса, пришло позднее. Но Лобачевский не смущался и продолжал свои «сумасшедшие» исследования по «сумасшедшей» геометрии, публикуя вслед за первой обширной работой следующие. Ослепнув к старости, свою последнюю книгу «Пангеометрия» он диктовал.

Деятельность Лобачевского была не только научной: 18 лет он был ректором Казанского университета, проявив на этом посту выдающуюся энергию, административное умение и понимание задач воспитания юношества. Его энергичная и умелая деятельность в тяжелое время холерной эпидемии 1835 года может показаться даже странной у человека, который занимался воображаемой геометрией, одной из абстрактнейших областей абстрактнейшей из наук – математики. Но, может быть, этому не следует особенно удивляться. Воля, необходимая для решительных действий в трудных условиях, также необходима для того, чтобы развить и отстаивать научные убеждения и истину вопреки всему.

Талант, гений – это не только специальные способности, но и характер. Как Магеллану и Нансену была нужна решимость, чтобы отправиться в неизведанное плавание, так теоретику нужна интеллектуальная решимость, чтобы подумать «невероятное» и развивать его вопреки не только устоявшимся взглядам и традициям, но нередко и вопреки собственным сомнениям. Но мало убедиться в своих идеях для самого себя – их нужно передать другим людям. А это тоже может требовать решимости, потому что люди могут не понять, отбросить и даже подвергнуть насмешкам и поруганию новые идеи и выводы. Это могут сделать в первую очередь свои же коллеги-ученые, убежденные в незыблемости своих взглядов в своей академической непогрешимости, мещане в академических креслах и на профессорских кафедрах.

В недавнее время, да возможно и по сию пору, с легкой руки Бертольда Брехта принято было поносить Галилея за предательство истины – за то, что он отрекся от своих научных убеждений. То, что отрекаться от истины дурно, едва ли нуждается в особых объяснениях. Но в момент суда инквизиции Галилей был 68-летним стариком, через 3 года он ослеп, а ему грозили пыткой, заточением, перед ним стоял образ сожженного на костре Джордано Бруно. Остановитесь, читатель, и постарайтесь представить себе, что это вас жгут на костре или вздергивают на дыбе. После этого мы продолжим разговор о верности истине – о ней так легко рассуждать, когда вам не грозят ни костер, ни пытки, ни заточение.

В действительности Галилей хотя и отрекся словесно, но истины не предал. Ослепший старец, узник инквизиции, он диктует свое главное научное сочинение и издает его за границей – в Голландии. Галилей исполнил свой долг ученого. По-видимому, на самом деле он не сказал инквизиторам знаменитые слова: «А все-таки она вертится!» Однако он сказал то же, хотя и менее эффектно, но более весомо – своим научным трудом, своей книгой, написанной после суда инквизиции. Поэтому легенда, приписывающая ему те слова, справедлива по существу. Поэтому правильно он остался в памяти народа верным истине, верным своим научным убеждениям.

Но Гауссу ничего не грозило, кроме разве нелестных суждений коллег, а он скрыл свои научные убеждения, скрыл истину. Он поступил мудро с точки зрения мещанства, одинаково прошлого или современного, подвизающегося в науке или всякого другого.

Охотно морализируя по поводу «отречения» Галилея или тех, кто когда-то «каялся в грехах менделизма-морганизма», мещанин будет делать все, чтобы «не испортить отношения» с кем следует. Он не будет ни отрекаться, ни каяться. Потому что ему не от чего отрекаться и не в чем каяться. У него все в порядке, все как полагается.

Этот конформизм, этот подлый дух приспособленчества противен настоящей науке, потому что она требует готовности подвергнуть сомнению и пересмотреть любые научные взгляды, научные положения, как бы ни казались они прочно установленными. Она требует дерзости мысли и дерзости в том, чтобы открыто выступить с дерзкой мыслью, как это было с открытием неевклидовой геометрии.

Но история пятого постулата и неевклидовой геометрии показывает также, с каким трудом люди, даже дерзко мыслящие, доходят до истин, которые, когда они уже открыты, оказываются простыми. Эта история показывает, насколько неповоротливой бывает мысль самых выдающихся ученых. Поэтому с дерзостью мысли они соединяют скромность в оценке своих достижений.

Дерзость в достижениях и скромность в их оценке, глубокое понимание того, что достигнутое – только капля в океане недостигнутого и непознанного, этому, вместе с законами и теориями, тоже можно учиться у великих ученых, у истории науки.

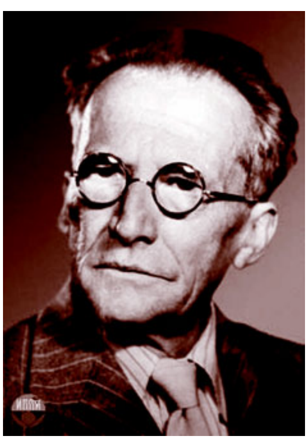
Как квантовая механика описывает микромир

М.КАГАНОВ

В этой статье речь пойдет только о волновом варианте квантовой механики и для простоты, где возможно, лишь об одной частице.

Уравнение Шрёдингера

Попробуем понять, что руководило Шрёдингером при формулировке нового уравнения – конечно, это уравнение получило имя Шрёдингера. Правильнее было бы написать не «что руководило Шрёдингером», а чем *мог бы*, *по моему мнению*, Шрёдингер руководствоваться. Уже закончив эту статью, я смог познакомиться с историей создания волновой механики по статьям ее творца (см. книгу Э.Шрёдингера «Новые пути в физике, статьи и речи» – М.: Наука, 1971). Ход рассуждений Шрёдингера описан мною в общих чертах верно.



Эрвин Шрёдингер

Все, что было привнесено в классическую физику (в механику и оптику) в попытках объяснить природу атомных и субатомных частиц, несомненно, никаким образом из основных положений классической физики не следовало. Все формулы, которые содержали постоянную Планка – и самого Планка, и Бора, и де Бройля – *привнесены, добавлены*, а не выведены. Эрвин Шрёдигер попытался построить последовательную теорию движения микроскопических частиц, сформулировать уравнение – такое, чтобы квантовые условия были необходимыми следствиями его решений. Его попытка завершилась успехом.

Задумаемся над тем, что из себя представляют уравнения классической механики и электродинамики (оптика – ее часть). И здесь не обойтись без ответа на вопрос «Почему?». Уравнения механики и электродинамики – основных наук, составляющих к началу XX века вместе с термодинамикой всю классическую физику, суть дифференциальные уравнения, т.е. они содержат не только искомые функции, но и их производные. В этом есть глубокий смысл.

События происходят в пространстве и во времени. Зная состояние в начальный момент, мы должны с помощью фундаментальных уравнений уметь определить, что будет происходить дальше, в последующие моменты времени. И прежде всего – через бесконечно малый интервал времени dt. Перемещение в пространстве требует умения описывать бесконечно малый сдвиг в пространстве – сдвиг, равный дифференциалу $d\vec{r}$ ($d\vec{r}$, как и радиус-вектор $\vec{r}$, имеет три проекции: dx, dy, dz). Именно поэтому фундаментальные уравнения должны содержать и содержат не только величины, определяющие состояние, но и их производные. Ньютону для создания механики пришлось разработать специальный математический аппарат – анализ бесконечно малых. Его тогда еще не было.

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №2.

Уже дважды было упомянуто слово «состояние». Как в классической физике описывается состояние? Рассмотрим два примера.

Первый пример – движение частицы массой m под воздействием силы $\vec{F}$, зависящей от координаты $\vec{r}$.

Уравнение Ньютона позволяет решить любую задачу о движении частицы. В понятие состояния частицы, несомненно, входит ее положение в момент времени t. Но знания координаты частицы $\vec{r} = \vec{r}(t)$ мало. Чтобы уметь определить траекторию, т.е. судьбу частицы в любой произвольный момент времени, надо, кроме координаты частицы в момент времени t, знать и ее скорость $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ в тот же момент. Координата $\vec{r}$ и скорость $\vec{v}$ полностью определяют состояние частицы. Вместо скорости $\vec{v}$ удобнее задавать импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Раньше (см. первую часть статьи) мы говорили, что физики часто вводят фазовое пространство. Фазовое пространство одной частицы это 6-мерное пространство $(\vec{r}, \vec{p})$. Оно объединяет в одно пространство трехмерное координатное и трехмерное импульсное пространства. Состояние частицы изображает точка в фазовом пространстве.

Выпишем для полноты и уравнение Ньютона в выбранных переменных:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Второй пример – электромагнитная волна.

Не будем уточнять, идет речь о световой волне или о радиоволне. Важно то, что в любой электромагнитной волне колеблются и электрическое и магнитное поля. Этот пример придется разобрать подробнее, так как он для нас очень важен.

Уравнения электродинамики сформулировал Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879). Одно из важных достижений максвелловской электродинамики – вывод о том, что в пустом пространстве могут распространятся электромагнитные волны. Состояние волны нам известно, если известны значения напряженностей полей – электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ [1] – во всех точках пространства (при любом $\vec{r}$) в данный момент времени t. Иными словами, состояние волны описывается двумя функциями: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$. Теория дает возможность подробно изучить свойства электромагнитных волн. Эксперимент их прекрасно подтверждает. Упомянем два свойства, которые помогут облегчить изложение.

1) Электромагнитные волны поперечны: в распространяющейся вдоль оси z волне векторы напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лежат в плоскости x, y.

2) Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу.

Выберем оси координат так: ось x – вдоль вектора $\vec{E}$, ось y – вдоль вектора $\vec{H}$, ось z, как мы уже говорили – вдоль волнового вектора $\vec{k}$ ($k_x = 0$, $k_y = 0$, $k_z = k$). В этом случае уравнения Максвелла выглядят сравнительно просто:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Индексы «x» и «y» обозначают, каковы отличные от нуля компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$; выражения $\partial\varphi/\partial z$ и $\partial\varphi/\partial t$ – частные производные от функции $\varphi = \varphi(z, t)$; скорость света, как всегда, обозначена буквой c.[2]

Из уравнений Максвелла легко выводится *волновое уравнение*. Ему удовлетворяют обе функции: $E_x = E_x(z, t)$ и $H_y = H_y(z, t)$. Выпишем волновое уравнение для напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0.$$

Почему уравнение называется волновым? Потому что его решение описывает волну. Решение уравнения можно записать по-разному – либо в виде действительной функции:

$$E_x = A\cos(kz - \omega t + \alpha),$$

либо в виде комплексной функции:

$$E_x = A\exp(i(kz - \omega t + \alpha)),$$

где A и α – действительные постоянные числа, зависящие от конкретной постановки задачи. Подставляя эти функции в волновое уравнение, убеждаемся, что обе они удовлетворяют уравнению, а его следствием служит связь между частотой и модулем волнового вектора: $\omega = ck$, а для *фотона* – между энергией и модулем импульса: $\varepsilon = cp$. Напомним: $\varepsilon = \hbar\omega$ и $\vec{p} = \hbar\vec{k}$; если $k_x = k_y = 0$, то $k = k_z$, $p = p_z$; в общем случае $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, а $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.

Сделаем важное замечание по поводу использования комплексных чисел и комплексных функций. Единственным оправданием их использования здесь и вообще в классической (неквантовой) физике служит удобство. В данном случае – то, что $d(e^x)/dx = e^x$, а $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (последняя формула называется формулой Эйлера). Конечно, и E_x и H_y – действительные величины. Как же иначе, если $e\vec{E}$ – сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, а магнитное поле $\vec{H}$ определяет силу Лоренца $(e/c)\left[\vec{v}\vec{H}\right]$, действующую на движущийся электрон. Найдя решение в комплексной форме, мы *обязаны* взять от полученного выражения действительную часть (Re):

$$E_x = A\cdot Re\left(\exp(i(kz - \omega t + \alpha))\right),$$

а

$$Re\left(\exp(i(kz - \omega t + \alpha))\right) = \cos(kz - \omega t + \alpha).$$

Выражение для E_x можно, естественно, получить без использования комплексных чисел.

Вернемся к уравнениям де Бройля (см. первую часть статьи). В дальнейшем энергию и импульс частицы мы будем обозначать так: ε – энергия, а $\vec{p}$ – импульс. Спутать с фотоном трудно: о нем пока не будет идти речь.

Первая задача, которую ставил перед собой Шрёдингер, была задача об энергетическом спектре атома водорода. Необходимо было найти уравнение, из которого бы *следовали* вычисленные Бором уровни энергии электрона, вращающегося вокруг ядра (протона). Ведь уровни, хотя они и были получены искусственно, с нарушением логики, прекрасно соответствовали данным опыта – спектру излучения и поглощения атома водорода. Понимая, что релятивистские осложнения при описании движения электрона в атоме водорода можно до поры до времени не учитывать, Шрёдингер использовал нерелятивистскую механику. Шрёдингер – создатель *нерялитивистской волновой (квантовой) механики*.

У свободно движущейся нерелятивистской частицы $\varepsilon = p^2/(2m)$, а, согласно уравнениям де Бройля, $\varepsilon = \hbar\omega$ и $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (мы заменили также обозначения частоты и волнового вектора). Запишем волновое уравнение, решение которого $A\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha\right)\right)$ должно приводить к следующему соотношению между частотой и волновым вектором:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Присутствие постоянной Планка $\hbar$ в этом выражении – свидетельство о квантовом генезисе волновых свойств частицы. С электромагнитными волнами было строго наоборот: для волнового описания ($\omega = ck$), конечно, не нужна постоянная Планка. С помощью постоянной Планка осуществляется переход к фотону.

Итак, нам надо найти уравнение, решение которого есть $A\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha\right)\right)$. Так как $\vec{k}\vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$, то это довольно просто. Обозначим искомое решение буквой Ψ. Для того чтобы функция Ψ равнялась $A\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha\right)\right)$, необходимо, чтобы уравнение, которому функция Ψ удовлетворяет, имело вид

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right).$$

А зачем, собственно говоря, вводить частоту и волно-

---

[1] *Напряженность $\vec{H}$ магнитного поля определяет тот вклад в магнитную индукцию $\vec{B}$, который дают внешние источники поля. (Прим. ред.)*

[2] *Не могу удержаться, чтобы не напомнить следующее. Формулируя экспериментальные результаты Майкла Фарадея (1791–1867), установившего связь электрических и магнитных свойств, Максвеллу необходимо было ввести множитель, связывающий разнородные (электрические и магнитные) величины. Этот множитель был обозначен буквой с. Когда оказалось, что численно множитель с равен скорости света, стала ясной электромагнитная природа света.*

вой вектор? Не проще ли функцию выразить через энергию и импульс: $\Psi = A' \exp\left((i/\hbar)(\vec{p}\vec{r} - \varepsilon t)\right)$? Фазу $\alpha' = \hbar\alpha$ мы включили в постоянную A', которая теперь комплексна.

Перепишем предыдущее уравнение, умножив его на $\hbar$. Подстановка в него решения $\Psi = A' \exp\left((i/\hbar)(\vec{p}\vec{r} - \varepsilon t)\right)$, естественно, приводит к правильному соотношению

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}.$$

Мы получили нужное соотношение, ничего не зная о природе Ψ-функции. Несомненно, Ψ-функция – необычная физическая величина: она комплексна и ограничиться ее действительной частью нельзя. Ни действительная, ни мнимая части Ψ-функции найденному уравнению не удовлетворяют. То, что эти соображения не остановили Шрёдингера, – свидетельство его удивительной интуиции.

Среди задач квантовой механики важное место занимают задачи, в которых частица или система частиц имеют определенную энергию. Это может быть либо изолированная система, либо система, находящаяся под действием постоянной силы. Задача о свободной частице, несомненно, принадлежит к классу таких задач. В дальнейшем только такими задачами мы и будем заниматься.

Выделим из Ψ-функции ее зависимость от времени:

$$\Psi = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}\right)$$

и получим уравнение для стационарной, не зависящей от времени волновой функции $\psi = \psi(\vec{r})$:

$$\varepsilon\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right).$$

Нам предстоит трудный шаг, связанный с введением операторов. Термина *оператор* не следует бояться, он не скрывает ничего таинственного. Например, $\partial/\partial x$ – оператор дифференцирования. Если функция стоит справа от оператора дифференцирования, то ее следует продифференцировать. Вот и все...

Сделаем важное утверждение: *каждой механической величине в квантовой механике соответствует оператор.*

Как вводятся операторы, мы покажем на примере трех операторов проекций составляющих импульса. Свободно движущаяся частица имеет импульс $\vec{p}$. Проекции импульса $\vec{p}$ на оси координат равны p_x, p_y, p_z. Операторы, соответствующие проекциям импульса, обозначим $\mathrm{O}p_x, \mathrm{O}p_y, \mathrm{O}p_z$ и запишем

$$\mathrm{O}p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ \mathrm{O}p_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y},\ \mathrm{O}p_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ψ-функцию свободной частицы с импульсом $\vec{p}$ мы знаем. Подействуем на нее операторами $\mathrm{O}p_x, \mathrm{O}p_y$, $\mathrm{O}p_z$ и получим

$$\mathrm{O}p_x\Psi = p_x\Psi,\ \mathrm{O}p_y\Psi = p_y\Psi,\ \mathrm{O}p_z\Psi = p_z\Psi.$$

Если действие какого-либо оператора на функцию сводится к умножению на константу, то такую функцию называют *собственной функцией этого оператора*, а значение константы – *собственным значением оператора*. В согласии с определением, если частица имеет импульс, равный $\vec{p}$, то это означает, что волновая функция есть собственная функция оператора $\mathrm{O}\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, заданного соответствующими проекциями:

$$\Psi_{\vec{p}} = \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \exp\left(-i\varepsilon(\vec{p})\frac{t}{\hbar}\right),\ \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = A' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}\right),$$

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}.$$

Надеюсь, вы понимаете, что пока мы лишь вводили новые обозначения, но не продвинулись дальше соотношений де Бройля. Часто разумно выбранные обозначения помогают продвинуться вперед.

Воспользовавшись определениями операторов, перепишем уравнение для ψ-функции:

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m}\left((\mathrm{O}p_x)^2 + (\mathrm{O}p_y)^2 + (\mathrm{O}p_z)^2\right)\psi.$$

Стоящий в правой части оператор по своему смыслу есть оператор кинетической энергии. Если к кинетической энергии добавить потенциальную энергию $U(\vec{r})$, то получится полная энергия. Если к оператору кинетической энергии добавить потенциальную энергию[3], то получится оператор энергии OH:

$$\mathrm{OH} = \frac{1}{2m}\left((\mathrm{O}p_x)^2 + (\mathrm{O}p_y)^2 + (\mathrm{O}p_z)^2\right) + U(\vec{r}).$$

Буква «H» выбрана потому, что энергия, выраженная через импульс и координату, называется функцией Гамильтона (W. Hamilton, 1805–1865). Полученное выражение определяет оператор Гамильтона – *гамильтониан.*

Вот теперь можно вслед за Шрёдингером продвинуться вперед.

Для того чтобы решить задачу о квантовом движении частицы, находящейся под действием силы $\vec{F} = -\partial U(\vec{r})/\partial\vec{r}$, надо найти *собственные функции и собственные значения гамильтониана*, т.е. решить *уравнение Шрёдингера*, которое мы запишем в трех различных, но тождественных друг другу видах:

$$\mathrm{OH}\psi = \varepsilon\psi,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left((\mathrm{O}p_x)^2 + (\mathrm{O}p_y)^2 + (\mathrm{O}p_z)^2\right) + U(\vec{r})\right)\psi = \varepsilon\psi, \quad (1)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + (\varepsilon - U(\vec{r}))\psi = 0,\ \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Теория уравнений такого типа математиками уже была разработана.

---

[3] *В том варианте квантовой механики, которая здесь излагается, оператор координаы есть оператор умножения, т.е. фактически любую функцию координаты при переходе к квантовой механике заменять оператором не надо.*

Решение уравнения Шрёдингера

Легко представить себе, какую радость испытал Шрёдингер, когда найденные им уровни энергии электрона в атоме совпали с теми, которые были получены Нильсом Бором, а уровни энергии осциллятора совпали с теми, которые навязал осциллятору Макс Планк для объяснения законов теплового излучения. Правда, оказалось, что квантовый осциллятор не может не колебаться. Даже в основном состоянии, т.е. в состоянии с наименьшей возможной энергией – энергией *нулевых колебаний* $(1/2)\hbar\omega$ – осциллятор колеблется. Уровни энергии осциллятора таковы:

$$\varepsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots - \text{целые числа.}$$

Нулевые колебания – специфическая квантово-механическая черта. Несколько слов о них будет сказано ниже. Заметим, что и электрон в основном состоянии в атоме водорода движется: среди значений n в формуле Бора нет значения $n = 0$.

Математическая теория решений уравнений вида уравнения Шрёдингера довольно сложна. Вывести формулы Бора и Планка нам здесь не удастся. Отметим только: для решения уравнения Шрёдингера необходимо сформулировать граничные условия для ψ-функции – в обеих задачах (об осцилляторе и об атоме водорода) ψ-функция на бесконечности должна обращаться в ноль. То, что вычисленные по теории Шрёдингера уровни энергии электрона в атоме водорода и осциллятора *точно* совпали с результатами Планка и Бора, – специфическая особенность именно этих задач. Из теории Шрёдингера следуют условия квантования, использованные Планком и Бором. В общем случае метод Бора и Планка – квантование *классического действия* – справедлив только тогда, когда действие велико, т.е. $n \gg 1$. Справедливость формул Планка и Бора при произвольных значениях числа n – в каком-то смысле удача.

Чтобы показать, как естественно возникают квантованные (дискретные) уровни энергии, мы рассмотрим простейшую задачу. Пусть частица, способная двигаться только вдоль оси x, «заперта» в потенциальной яме шириной $2d$ с бесконечно высокими потенциальными стенками, т.е. $U = 0$ при $|x| \le d$ и $U = \infty$ при $|x| \ge d$. Искомая ψ-функция подчиняется простому уравнению (см. третье из уравнений (1))

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}. \qquad (2)$$

Граничное условие в данном случае таково: $\psi = 0$ при $|x| = d$ (это нетрудно показать). Уравнению удовлетворяют и $\psi = \cos kx$ и $\psi = \sin kx$. Граничное условие выбирает допустимые значения k. Итак, при $|x| \le d$

$$\psi_n^s = A^s \cos kx, \quad kd = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$n = 0,1,2,3\ldots - \text{целые числа,} \qquad (2а)$$

$$\psi_n^a = A^a \sin kx, \quad kd = n\pi, \quad n = 1,2,3\ldots$$

О значениях постоянных A^s и A^a скажем ниже, верхние индексы $(s,\ a)$ отмечают тот факт, что косинус – симметричная функция, а синус – асимметричная.

Разрешенные значения энергии частицы представляют две серии значений:

$$\varepsilon_n^s = \frac{\hbar^2}{2m}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{d^2},$$

$$n = 0,1,2,3\ldots - \text{целые числа,} \qquad (2б)$$

$$\varepsilon_n^a = \frac{\hbar^2}{2m} n^2 \frac{\pi^2}{d^2}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

Как у электрона в атоме, у частицы в потенциальной яме есть основное состояние, наименьшее значение энергии в котором равно $\varepsilon = \left(\hbar^2/2m\right)\pi^2/\left(4d^2\right)$. Отметим: частица не может «лечь на дно ямы» – энергия основного состояния отлична от нуля, при этом чем яма у́же, тем энергия основного состояния больше.

И еще одну такую же простую задачу мы сформулируем, а решение оставим читателям для упражнения. Речь пойдет о прохождении через непреодолимый для классической частицы потенциальный барьер. По-прежнему будем считать, что частица может двигаться только вдоль оси x, а потенциальная энергия $U(x) = U_0 > 0$ при $|x| \le d$ и $U = 0$ при $|x| \ge d$. Это и есть простейший потенциальный барьер. Во всяком случае для частиц с энергией $\varepsilon < U_0$. Итак, пусть на потенциальный барьер слева падает частица с волновым вектором k ($k = p/\hbar$, p – импульс, $p = p_x$). Решив задачу, вы убедитесь, что волновая функция слева от барьера будет суммой двух волн – падающей (волновой вектор k) и отраженной (волновой вектор $-k$); справа от барьера волновая функция – волна с волновым вектором k, уходящая от барьера. Получить этот результат и вычислить амплитуды прошедшей и отраженной волн можно, если выяснить, что представляет собой решение уравнения при $|x| \le d$. Надо только добавить: при $x = \pm d$ функция $\psi(x)$ и ее производная $d\psi/dx$ непрерывны. И это условие тоже нетрудно вывести.

Что же такое Ψ-функция?

Значение открытия Шрёдингера не в том, что с помощью его уравнения были получены уже известные результаты. Фундаментально важно то, что они получены единообразно. Каждая задача – частный случай единой теории. Теория – волновая механика – предоставила естественную возможность двигаться вперед, формулировать новые задачи.

Один из важнейших результатов новой теории – возможность рассматривать системы, состоящие из нескольких частиц. Оказалось, что способ описания систем в волновой механике с помощью ψ-функции существенно отличается от описания классических волн. Остановимся на этом вопросе. Это даст возможность осторожнее относиться к ψ-функции, не переносить на нее буквально свойства классических волн. Кстати, напомню: полная волновая Ψ-функция всегда комплексна.

Нам предстоит сравнить описание движения двух классических частиц, двух классических волн и двух квантовых частиц.

Пусть *две классические частицы* 1 и 2 движутся в одном силовом поле, не взаимодействуя друг с другом (последнее – только для простоты). Каждая частица движется по своей траектории: $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$. Обе траектории – кривые (прямые – частный случай) в трехмерном пространстве.

Пусть есть *две классические волны* – например, радиоволна 1 и световая волна 2. Каждая из волн описывается своей функцией, своей зависимостью от времени и координат в пространстве: $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_1(\vec{r}, t)$, $\mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{\Phi}_2(\vec{r}, t)$. Как и траектории частиц, волны «существуют» в привычном нам трехмерном пространстве.

В обоих классических примерах движение двух объектов описывается двумя функциями. Они могут быть скалярными, векторными или более сложными. Так, электромагнитная волна распространяется в виде двух векторов. И все же в классическом описании есть притягательная наглядность: нечто движется в трехмерном мире.

Описание движения *двух квантовых частиц* устроено совершенно иначе и лишено наглядности. К сожалению, у нас нет возможности привести аргументы. Ограничимся только констатацией – утверждениями без объяснений. «Устроено» описание совсем не так, как описание двух классических волн: Ψ-функция двух частиц – функция семи переменных. Переменные – дважды по три координаты (x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2) и время t. Лучше сказать так: волновая функция двух частиц – функция двух трехмерных радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ и времени t, т.е. $\Psi = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t)$.

Для описания поведения N частиц приходится использовать пространство размерности $3N$. Его называют *конфигурационным пространством*.

Давайте в этом месте остановимся и задумаемся. Известные нам способы описания движения классических объектов можно рассматривать как абстракцию чувственных восприятий. Действительно, траектория – просто след трассирующей пули. Сложнее с электромагнитной волной. Трудно себе сейчас представить, но для создания Максвеллом электродинамики, как теоретического описания результатов Фарадея, ему понадобились какие-то теперь всеми забытые шестеренки. Но волна в трехмерном пространстве сама по себе – прекрасный образ, заставляющий вспомнить зрительно наблюдаемые волны на поверхности воды или на натянутом канате.

С Ψ-функцией совсем иначе. Прежде всего, она комплексна. А когда с помощью Ψ-функции надо описать движение N частиц, то приходится прибегнуть к $3N$-мерному пространству. О какой абстракции чувственного восприятия можно говорить?! Невозможно себе представить четырехмерное пространство. Описать можно пространство любого числа измерений, а представить – нет. Похоже, квантовая механика оперирует более абстрактными понятиями, чем классическая физика, а Ψ-функция более «удалена» от объекта, который она описывает, чем величины, используемые в классической (неквантовой) физике.

Вернемся к одной частице, чтобы понять, как с помощью Ψ-функции можно получить информацию, допускающую сравнение с экспериментом.

В классической механике *состояние* одной частицы описывается двумя векторами: радиусом-вектором $\vec{r}$ и импульсом $\vec{p}$. Величины, характеризующие состояние, могут быть непосредственно измерены [4]. Задача теории (классической механики) указать, каковы значения $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Есть непосредственная возможность сравнить с экспериментом величины, определяющие состояние.

Состояние электромагнитной волны характеризуется значениями амплитуд волн электрического и магнитного полей в любой момент времени t. И они могут быть измерены. Можно измерить такие волновые характеристики, как частота и длина волны. Электромагнитная волна может быть полностью восстановлена, а результат можно сравнить с теорией.

Ψ-функция, несомненно, описывает *частицу*. Когда речь идет об электроне, то о частице (именно, как о частице!) многое хорошо известно: заряд, масса. Никто никогда не встречался с порцией заряда, меньшей заряда электрона. И масса и заряд электрона непосредственно измерены.

Состояние частицы в квантовой механике описывает Ψ-функция – это один из постулатов квантовой механики. Более того, слова *состояние* и *Ψ-функция* – синонимы. Согласившись с этим, мы имеем право задать такие вопросы:

Что конкретно мы знаем о частице, если нам известна ее Ψ-функция?

Какие величины, входящие в Ψ-функцию, можно сравнить с результатами опытов?

Нет приборов, с помощью которых можно непосредственно измерить Ψ-функцию. Нужен способ, позволяющий извлечь необходимую информацию. Каков он? Способ должен быть достаточно общим. Иначе с каждой новой задачей физику придется изобретать новый способ. В частности, именно этого и хотели избежать творцы квантовой механики.

Ответить на заданные вопросы помогут примеры, осмыслив которые мы сформулируем алгоритм, пригодный для любых задач.

Обратимся сначала к задаче о частице в потенциальной яме (мы об этом уже говорили). Пусть известно, что волновая функция частицы есть $\psi_0 = A^s \cos kx$, а $kd = (1/2)\pi$, т.е. $n = 0$. Очевидно, энергия частицы в этом состоянии имеет значение $\varepsilon_0^s = \left(\hbar^2/(2m)\right)\pi^2/\left(4d^2\right)$. Если бы мы сумели измерить энергию частицы, отсчитанную от дна потенциальной ямы, то несомненно получили бы именно это значение. А если бы измерили частоту, излучаемую частицей при переходах из состояния с большей энергией в состояние с меньшей, то наверняка бы обнаружили, что квант энергии $\hbar\omega$ равен разности двух значений энергии из выписанных выше формул. Хотя обычно в реальных экспериментах с атомными и субатомными частицами имеют дело с большими коллективами частиц, в данном случае нет никаких сомнений, что каждый отдельный электрон в

[4] *Мы не останавливаемся на том, как происходит измерение. Измерение – сложная самостоятельная задача. Нам важно здесь подчеркнуть, что измерить координату и импульс частицы можно.*

потенциальной яме будет иметь тот самый спектр значений энергии, который указан формулами (2). Эксперимент можно проводить со многими частицами или повторять много раз. Результаты (скажем, спектр излучения) будут тождественны.

А что еще известно о частице в потенциальной яме, доступное сравнению с экспериментом? Пожалуй, ничего. По крайней мере, пока…И скажем откровенно, в понимании Ψ-функции мы совсем не продвинулись. Ведь для того чтобы получить нужное значение энергии, и было сформулировано Шрёдингером уравнение для непонятно что из себя представляющей Ψ-функции.

Вернемся к постановке задачи о частице в яме. Теперь обратимся к первому из уравнений (1). Мы видим, что наша задача состоит в том, чтобы найти собственные функции оператора Гамильтона и его собственные значения. Формулы (2) решают эту задачу. Запомним этот факт в более абстрактной формулировке:

Когда Ψ-функция – собственная функция оператора физической величины, то собственное значение, соответствующее этой функции, это значение физической величины частицы, состояние которой – данная Ψ-функция.

Мы подчеркиваем этот факт вторично. Первый раз, когда вводили оператор импульса.

Теперь задумаемся над результатом той задачи, которую я предложил вам в виде упражнения, – о прохождении частицей потенциального барьера. По условию задачи волна, описывающая движение частицы, приближается слева к барьеру, частично отражается от него, а частично проходит через барьер и движется от него вправо. Таким образом, вне барьера есть три волны. Все они описывают движение частицы (частицы, а не частиц!) с определенным импульсом. Справа от барьера Ψ-функция описывает состояние частицы с импульсом, равным $\hbar k$, как и падающая на барьер волна. А вот Ψ-функция, отразившаяся от барьера, описывает частицу с импульсом $-\hbar k$. Можно ли проверить это странное утверждение? И да и нет.

Если направить *одну* частицу на барьер и попытаться обнаружить эту частицу за барьером летящей от него, то результат предсказать нельзя: иногда частица будет обнаружена, иногда не будет. То же самое – при попытке обнаружить частицу, отразившуюся от барьера: иногда будет обнаружена, иногда нет. При повторении эксперимента два-три раза никакая закономерность не проявится. А если повторять эксперимент многократно, закономерность начнет проявляться: чем больше амплитуда прошедшей волны, тем чаще будут обнаруживаться частицы справа от барьера; чем больше амплитуда отраженной волны, тем чаще будут зафиксированы частицы, отразившиеся от барьера.

Выше описан мысленный эксперимент. Но вот описание вполне реального опыта – дифракции электронов на кристалле. Вспомните – этот эксперимент служит (с опозданием, правда) несомненным доказательством предположения де Бройля.

Рассмотрим рассеяние электронов на кристаллической решетке внимательно, наблюдая за каждым электроном. Обнаружение электрона, отразившегося от кристалла, проявляется в появлении на фотопластине маленького пятнышка. Размер пятнышка определяется величиной зерна фотопластинки. Чем зерно меньше, тем меньше пятнышко. Есть уверенность: имей мы пластинку с бесконечно малым зерном, мы убедились бы, что электрон обнаруживает себя во вполне *определенной точке* пространства. Положение точки случайно. При повторении опыта электрон – точка на пластинке – появляется то в одном случайном месте, то в другом. Ничего похожего на дифракцию.

Наблюдая за отражением большого числа электронов (последовательно или одновременно – безразлично), убедимся: каждый отдельный электрон засвечивает фотопластинку в совершенно случайном месте, но при большом числе электронов, засветивших пластинку, вырисовывается дифракционная картина, на ней отчетливо различимы места скопления точек (туда попало много электронов) и места, куда электроны не попали вовсе. Дифракционная картина очень похожа на ту, которая наблюдается при рассеянии рентгеновских лучей.

Так же, как в случае прохождения частицы через потенциальный барьер, теория рассеяния электронов на кристалле строится путем решения уравнения Шрёдингера для *одного* электрона, но при этом правильно описывает результаты опыта со многими электронами. Мы начинаем понимать, что в Ψ-функции скрыта информация, относящаяся не к одному электрону, а к *ансамблю электронов*.


Макс Борн

Макс Борн (1882–1970) в том же 1926 году, когда Эрвин Шрёдингер сформулировал свое уравнение, высказал идею о смысле волновой функции. Он понял, что величина $|\Psi|^2\,dx$ определяет *вероятность* попадания частицы в состоянии $\Psi(x,t)$ в интервал dx между точками x и $x+dx$. Если Ψ-функция – функция радиуса-вектора $\vec{r}$, то $|\Psi(\vec{r})|^2\,dV$ определяет вероятность попадания частицы в элемент объема $dV = dxdydz$ вокруг точки с координатами x, y, z; $|\Psi|^2$ – квадрат модуля комплексного числа Ψ, $|\Psi|^2 = \Psi * \Psi$, звездочка ($*$) означает комплексное сопряжение. Надо подчеркнуть, что для стационарных задач $|\Psi|^2 = |\psi|^2$ не зависит от времени.

Максу Борну принадлежат и другие фундаментальные работы по квантовой механике. В 1954 году он был удостоен Нобелевской премии по физике с простой и выразительной формулировкой: «За работы по квантовой механике».

В нашем изложении первое нетривиальное следствие идеи Борна – возможность определить константы A^s и A^a у волновых функций частицы в потенциальной яме. Условие их определения таково: вероятность обнаружить частицу в потенциальной яме должна быть равна единице. Ведь частица там есть! Нарисуем функции $\left|\psi_n^s(x)\right|^2$ и $\left|\psi_n^a(x)\right|^2$, а значения констант A^s и A^a выберем так, чтобы площадь под кривыми равнялась единице. Условие будет выполнено. В данном случае $A^s = A^a = \sqrt{1/d}$ для всех значений n. Напомним, что ширина потенциальной ямы равна $2d$.

Пытаясь проверить утверждение Борна о смысле Ψ-функции на примере частицы, находящейся в *определенном* состоянии внутри ямы, мы вынуждены были бы иметь дело с ансамблем тождественных объектов. Одиночное измерение, как и в случаях, рассмотренных раньше, дало бы совершенно случайный результат.

Описание волновой механики Шрёдингера мы начинали с рассмотрения свободной частицы, волновая функция которой – плоская волна. Но для плоской волны $\left|\Psi(\vec{r})\right|^2$ есть константа, т.е. вовсе не зависит от координаты. Это значит, что свободную частицу с равной вероятностью можно обнаружить в любой точке пространства. Напомним: импульс у нее имеет вполне определенное значение.

Соотношения неопределенностей

Создан строгий математический аппарат квантовой механики. Он хорошо разработан и позволяет решить (в принципе, конечно) любую задачу, которая относится к «ведомству» квантовой механики. Самое точное решение не позволяет выйти за пределы вероятностного, статистического подхода. Поэтому полученные в результате ответы, как правило, относятся к большому числу частиц, к ансамблям частиц, а не к отдельным изолированным частицам.

Еще один поясняющий пример. Предположим, мы хотим решить задачу о столкновении двух частиц. В нашем макроскопическом мире такое грустное событие, как столкновение (например, дорожное происшествие), может быть рассмотрено с любой степенью подробности. Каждый из нас знает, с какой дотошностью представители дорожной милиции изучают следы, чтобы нарисовать траектории столкнувшихся машин. В квантовой механике такой подход принципиально невозможен хотя бы потому, что микрочастица не движется по траектории. Ее движение описывается Ψ-функцией. Некоторые характеристики столкновения достоверны. Как правило, те, которые являются следствием законов сохранения энергии и импульса.

Описание столкновений в достоверных терминах называют *кинематическим* описанием. Кинематического описания столкновения недостаточно. Необходимо знать, как часто (или как редко) происходят столкновения. Квантовая теория дает возможность вычислить вероятность столкновения с тем или другим исходом, разрешенным кинематикой столкновения. Мерой вероятности служит величина размерности площади, именуемая *эффективным сечением рассеяния*. По величине этого сечения физики, занятые исследованием столкновений в мире микрочастиц, ясно представляют себе, имеют они дело с редким, трудно наблюдаемым явлением или с явлением, легко доступным обнаружению.

Мы уже говорили, что когда Ψ-функция – собственная функция оператора физической величины, то собственное значение, соответствующее этой функции, есть значение данной физической величины. Позволяет ли квантовая механика выяснить, каковы будут результаты измерения физической величины в том случае, когда Ψ-функция не есть собственная функция оператора физической величины, которая нас интересует? Однозначный ответ получить нельзя. Но можно выяснить, какие значения будут получаться при измерении и с какой вероятностью.

Общее правило требует разложить Ψ-функцию по собственным функциям оператора той физической величины, значения которой мы измеряем.[5] Квадрат модуля коэффициента при собственной функции, соответствующей определенному значению физической величины, пропорционален вероятности получить при измерении именно это значение физической величины.

Для определенности повторим сказанное на примере измерения импульса. Мы знаем, что из себя представляет оператор импульса и каковы собственные функции этого оператора (собственные функции оператора импульса – плоские волны). Какие значения импульса $\vec{p}$ и с какими вероятностями мы получим при измерении импульса электрона, находящегося в потенциальной яме, или электрона в атоме водорода? Для получения ответа надо разложить Ψ-функцию по плоским волнам. Коэффициент разложения зависит от импульса $\vec{p}$, квадрат его модуля пропорционален вероятности того, что измеренное значение окажется равным $\vec{p}$.

Один из фундаментальных результатов квантовой механики – выявление факта существования пар физических величин, которые не могут одновременно иметь точные значения. Естественно, обе они описывают движение одной частицы. Называют их *сопряженными величинами*. С одной парой мы уже встретились – это импульс и координата. Если частица имеет определенное значение импульса, то, как мы видели, ее координата полностью не определена. Существуют соотношения – *соотношения неопределенностей,* указывающие максимально возможную степень точности пары значений сопряженных величин. Сформулируем соотношение неопределенностей для x и p_x. Пару составляют проекции радиуса-вектора $\vec{r}$ и импульса $\vec{p}$ на одну ось. Знание вероятностей значений физических величин позволяет ореределить их средние значения. Обозначать средние значения будем и большими буквами и угловыми скобками (и так и так).

Пусть частица находится в каком-то состоянии, а X и P_x – средние значения ее координаты и проекции импульса. Мерой *неопределенностей* координаты x и

[5] *Разложение по собственным функциям напоминает разложение произвольного вектора $\vec{A}$ в трехмерном пространстве по трем ортогональным ортам $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$: $\vec{A} = (An_1)\vec{n}_1 + (An_2)\vec{n}_2 + (An_3)\vec{n}_3$. Роль ортов играют собственные функции. Важное свойство оператора любой физической величины состоит в том, что собственных функций всегда хватает для разложения.*

проекции импульса p_x могут служить следующие *средние* величины:

$$\delta x = \sqrt{\left\langle (x - X)^2 \right\rangle}\,, \ \ \delta p_x = \sqrt{\left\langle (p_x - P_x)^2 \right\rangle}\,.$$

Соотношение неопределенностей утверждает:

$$\delta x \delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\,. \qquad (3)$$

Наименьшее, *непреодолимое* значение произведения неопределенностей равно $\hbar/2$.

Важное следствие соотношений неопределенностей – нулевые колебания, о которых мы упоминали. Если бы энергия осциллятора равнялась нулю, то это означало бы, что ее импульс и координата (оба) равны нулю, что невозможно. По той же причине в основном состоянии электрон в атоме водорода имеет конечную энергию. Объяснение многих характерных квантовых явлений основано именно на соотношениях неопределенностей.

Неравенство (3) вывел Вернер Гейзенберг в 1927 году. В том же году Нильс Бор сформулировал *принцип дополнительности*, согласно которому у *любой* физической величины есть дополнительная – компонента пары, которая не может быть точно определена вместе с ней. Соотношения неопределенностей (типа (3)) являются математическим выражением принципа дополнительности, который сыграл важную роль в понимании структуры квантовой механики.

Вернер Гейзенберг

Вероятностный, статистический характер предсказаний квантовой механики озадачивал и озадачивает многих. Очень трудно себе представить, что ответ на поставленный вопрос о поведении микрочастицы – ответ максимально возможной определенности – содержит лишь вероятность того, что произойдет, а не точное предсказание результата. Трудно привыкнуть к тому, что для экспериментальной проверки теории, построенной на основании уравнения, описывающего движение *одной* частицы, экспериментировать в большинстве случаев необходимо не с одной частицей, а с *ансамблем* частиц.

Дополнительность, статистический характер описания объектов микромира, как и отказ от наглядности, – все это с трудом преодолевалось не только рядовыми физиками, но и самими создателями квантовой механики.[6] Тот факт, что решение многих задач квантовой механики не заканчивается решением ее фундаментальных уравнений, а требует «перевода» на язык, принятый в классической физике, и невозможен без использования статистического подхода, до настоящего времени у некоторых вызывает неудовлетворенность. Из-за этого до сих пор продолжаются поиски улучшения аппарата квантовой механики. Попыток было много, но ни одна не была успешной.

Иногда можно прочесть, что квантовая механика противоречит принципу причинности, детерминизму. Обычно выражаются осторожнее – механическому детерминизму. Но и это не так. Согласно уравнению Шрёдингера, состояние развивается вполне детерминированно: изменение движения обусловлено действием сил, а реакция частицы и системы частиц никогда не опережает причину.

Большинство физиков-теоретиков считают нерелятивистскую квантовую механику идейно завершенной, логически безупречной наукой. На протяжении уже многих десятков лет она служит надежной основой понимания свойств не только атомов и молекул, но и разнообразных макроскопических систем: твердых тел, жидкостей, плазмы...

Как физика описывает явления, происходящие в природе, а также свойства макроскопических тел – отдельная серьезная тема. Нерелятивистская квантовая механика – одна из тех базовых наук, которые служат основой описания для других дисциплин. Как всякая математизированная наука, квантовая механика требует строгой постановки и применима отнюдь не ко всему на свете. К сожалению, на объектах материального мира нет каких-либо меток – указаний, какой теорией надо (можно) пользоваться при описании их свойств или при объяснении происходящих с ними явлений. Одно из важнейших качеств опытного физика – *умение до понимания* свойства и/или явления *почувствовать*, на базе какой теории надо искать понимание. На этом этапе возможны неожиданности. Накоплен огромный опыт и понято множество явлений и свойств на основе нерелятивистской квантовой механики. Она так зарекомендовала себя, что успешно используется даже в инженерной практике – при создании различных приборов и устройств.

Принцип соответствия

Если бы «сражения» революций естествознания нуждались в знаменах, то на знамени релятивистской революции красовалась бы скорость света c, а на знамени квантовой революции – постоянная Планка $\hbar$. Для перехода от новой механики Эйнштейна к старой классической механике Ньютона надо устремить скорость света к бесконечности. Фактически пренебрегают высокими степенями отношения v/c, где v – скорость частицы (тела).

От квантовой механики к механике Ньютона можно перейти, если приравнять $\hbar$ нулю. Вот – пример. При $\hbar = 0$ исчезает туннельный эффект. Потенциальный барьер становится непрозрачным для частиц, если их энергия меньше его высоты. Решив ранее предложен-

[6] *В статье 1953 года Макс Борн убеждает Эрвина Шрёдингера (!), что без использования теории вероятности при описании свойств атомных и субатомных частиц обойтись невозможно, а в некрологе 1961 года возвращается к этому вопросу. Очевидно, один из создателей квантовой механики ушел из жизни, так и не признав полностью «окончательность» ее структуры. То, что подобные сомнения не покидали Альберта Эйнштейна до конца жизни, я знал, а с точкой зрения Шрёдингера познакомился, когда писал эту статью.*

ную мной задачу, вы в этом убедитесь. Так и должно быть по законам классической механики.

Но не всегда переход так прост. В выражении для дискретных уровней энергии электрона в атоме водорода постоянная Планка $\hbar$ стоит в знаменателе. Нет возможности просто положить ее равной нулю. Рассмотрим этот случай подробнее.

Чтобы не возвращаться к началу статьи, выпишем еще раз формулу Бора:

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_n} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

При классическом подходе электрон, движущийся вокруг протона, может иметь любую энергию $E < 0$ (напомним: потенциальную энергию на бесконечности мы выбрали равной нулю). При переходе к классическому пределу должна исчезнуть дискретность уровней, т.е. при произвольном n отношение

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{E_{n+1} - E_n}{|E_n|}$$

должно обратиться в ноль при $\hbar = 0$. Согласно формуле Бора, $\Delta E/E = (2n+1)/(n+1)^2$. Как перейти к пределу? Надо выразить n через E, а *потом* устремить $\hbar$ к нулю. Нетрудно убедиться, что $\Delta E/|E|$ в пределе действительно обращается в ноль.

Обязательность предельного перехода от квантовой механики при $\hbar = 0$ к классической носит название *принципа соответствия*. Когда речь идет о соответствии формул, встречающиеся трудности чаще всего похожи на ту, которая возникла с формулой Бора, и легко преодолимы. Иногда приходится вспомнить, что формула описывает чисто квантовый эффект, а классической формулы нет вовсе, не с чем сравнивать.

Иногда принцип соответствия используют менее радикально – как метод вывода приближенных формул в условиях, когда действие $\mathrm{I} \gg \hbar$. Тогда принцип соответствия используется для приближенного решения квантовой задачи. Слова «принцип соответствия» заменяют словами «квазиклассическое приближение». Используя квазиклассическое приближение, приравнивают классическое значение действия целому числу постоянных Планка: $\mathrm{I} = n\hbar$, $n \gg 1$. Из равенства $\mathrm{I} = n\hbar$ следует, что расстояние между соседними уровнями равно $\Delta E = \hbar\omega$, где в *данном случае* $\omega = 2\pi/T_{\text{кл}}$, а $T_{\text{кл}}$ – период движения частицы по классической траектории.

Квазиклассическое приближение часто весьма облегчает решение задач. Содержащуюся в волновой функции информацию формулируют в терминах классической физики. Без этого невозможно сравнение теории с экспериментом. Можно сказать иначе: квантовая механика не может обойтись без классической. Все это весьма осложняет «взаимоотношение» между квантовой механикой и классической. Аккуратный анализ предельного перехода от квантовой механики к классической – непростая задача, не будем на ней останавливаться.

Заключительные замечания

Заканчивается рассказ о том, *как* описывают свойства объектов микромира. Заглавие статьи по существу содержит не вопрос, а ответ: *свойства микрочастиц описывает квантовая механика*. Существуют разные способы построения квантовой механики. Мы избрали самый доступный для изложения вариант, так как он позволяет познакомиться с описанием движения объектов микромира, не привлекая *весь* математический аппарат квантовой теории. Многое, правда, не объяснено, а лишь обозначено. Понять квантовую механику так, чтобы самому решать задачи, научно-популярной статьи недостаточно. Чтобы освоиться в квантовой механике, необходимо изучить весь ее математический аппарат, привыкнуть к нему. Последнее возможно, если использовать квантовую механику в своей практической деятельности.

Наибольшая трудность квантовой механики – непредставимость основного объекта, для описания которого она создана. Этот объект – *микрочастица*.

Что есть частица? Утверждение о корпускулярно-волновом дуализме, т.е. о корпускулярно-волновой двойственности, ничего не разъясняет. Как ни называй, но ведь частицы ведут себя по-разному: *то* как волны, *то* как частицы. И *представить* себе я этого не могу. Лев Давидович Ландау (1908–1968, Нобелевская премия 1962 г.) утверждал, что огромное достижение – понимать, не представляя. Можно сказать и так. Много раз я повторял это высказывание с некой гордостью за физиков и физику. Гордость, несомненно, звучит и в словах Ландау. Но в этот раз я неожиданно подумал: ведь можно иначе поставить ударение, признав, что нам *не хватает* воображения: «Понять можем, а *представить* – нет». Интуитивный этап творчества для большинства невозможен без наглядного образа. Решение каждой задачи – пример пусть иногда довольно примитивного, но все же творчества. И мы все знаем, как помогает наглядность. Может быть, я несколько преувеличиваю, но о себе я знаю это точно.

Непредставимость основных понятий заставляет создавать разнообразные наглядные образы. Атом изображают то в виде солнечной системы, рисуя орбиты, которых нет; то в виде атомного ядра, окруженного странно анизотропной атмосферой; а иногда просто в виде шарика. Одно изображение удобно в одном случае, другие – в других. Все картинки играют лишь вспомогательную роль. И все имеют мало общего с атомом, каков он есть, согласно квантовой механике. Атом – конструкция. Ядро и окружающие его электроны – его составные части. Если не вдаваться в подробности, не пытаться уточнять свои представления, то «картинка» сама возникает: ядро, окруженное электронами. А вот электрон я действительно не могу себе представить…

Я благодарен Льву Ильичу Розоноэру за несколько ценных замечаний. Они были учтены в окончательном тексте статьи.

Хорхе Хуан де Сантасилья

А.ВАСИЛЬЕВ

Хорхе Хуан де Сантасилья (1713–1773) – потомок двух благородных испанских семей, рыцарь мальтийского ордена – все свои силы направил на укрепление испанской государственности, которой действительно принес немалую пользу. Уже в возрасте 14 лет в чине командора Хорхе Хуан сражался с мавританскими галерами в Средиземном море. В 16 лет он вернулся в Испанию, чтобы поступить в Корпус морской стражи – Навигацкую школу в Кадисе. Здесь, наряду с углубленным изучением геометрии, тригонометрии, астрономии, навигации и картографии, он овладел искусствами музыки, живописи и танца. В студенческой среде Хорхе Хуан получил прозвище «Евклид».

Кадис в те годы представлял собой форпост просвещения в Испании, где проповедовались идеи Вольтера и Ньютона, вовсю развивалась торговля с Америкой, а Навигацкая школа обеспечивала флот квалифицированными моряками. В этой творческой атмосфере таланты Хорхе Хуана получили необычайное развитие, так что к 21 году он уже был сложившимся мореплавателем. Как раз в это время, в 1734 году, испанский король Филипп V получил от своего кузена во Франции Людовика XV запрос о содействии в организации научной экспедиции в Перу для измерения меридиана и определения земного градуса, с тем чтобы сопоставить результаты этих наблюдений с результатами аналогичной экспедиции Мопертюи в Лапландию. Длина дуги, отвечающая меньшему радиусу, разумеется, меньше длины дуги, отвечающей большему радиусу, хотя их углы равны. Измерение длин дуг в различных местах должно было позволить определить форму Земли.

В XVIII веке вопрос о форме Земли стоял с такой же остротой, как двумя столетиями позже встал вопрос о структуре ДНК. Некоторые академики утверждали, что Земля напоминает собой дыню, тогда как другие стояли на том, что ее форма скорее ближе к арбузу. Сторонники «арбузной» гипотезы, среди которых были Ньютон, Галлей и Гюйгенс, опирались в своих размышлениях на всемирный закон тяготения (тела весят меньше на экваторе) и на эксперименты с маятником (в разных местах он колеблется с разными частотами). Экспедиции Французской академии на полюс и на экватор должны были разрешить эту фундаментальную проблему.

Филипп V, сторонник прогресса в его французской интерпретации, не только одобрил начинание Людовика XV, но и распорядился выделить в состав перуанской экспедиции двух образованных офицеров, способных при необходимости провести даже своими силами все необходимые измерения. Более того, Испания взяла на себя половину стоимости экспедиции. Выбор короля пал на молодых морских офицеров Хорхе Хуана де Сантасилья и Антонио де Уллоа. Если первому из них к началу предприятия исполнилось двадцать два года, то второму было лишь двадцать лет. Обоим вне очереди и без выслуги лет было присвоено звание лейтенанта, и каждый из них получил свое предписание. Хорхе Хуану было поручено сконцентрироваться на геодезических измерениях, а Антонио – на натуралистических наблюдениях. Однако задачи двух исследователей этим не ограничивались. Они были обязаны вести полный дневник своего путешествия, записывать все физические и астрономические наблюдения, включая расчеты широты и долготы географических объектов, делать зарисовки портов и фортификационных сооружений, проводить ботанические и минералогические наблюдения, а также подготовить секретный доклад о политической ситуации в заморских территориях. Вдобавок, испанские офицеры обязались приглядывать за своими французскими компаньонами, ибо вся полученная теми информация должна была поступить в распоряжение французского двора.

С этими инструкциями 26 мая 1735 года офицеры покинули Кадис, а 7 июля прибыли в Картахену. Французские же академики прибыли в Южную Америку лишь 15 ноября, и все вместе они направились в Кито. С 1736 по 1744 год велись измерения земного радиуса вдоль экватора, что потребовало преодоления неисчислимых трудностей. Топографическая съемка на пересеченной местности всегда представляла особые проблемы, но в горах высотой до 5000 метров масштаб этих проблем возрастал многократно. Для повышения точности измерений экспедиция разбилась на две группы, каждая из которых, двигаясь навстречу друг другу, выполняла полный цикл топографической съемки. Данные геодезических измерений затем сопоставлялись с астрономическими наблюдениями.

Впоследствии Антонио де Уллоа описал условия, в которых проводилась съемка, следующими словами: «...большую часть времени мы проводили в убогой хижине, ибо свирепый ветер и лютый холод не позволяли надолго покидать ее. Сквозь облака не было никакой видимости, а дыхание затруднялось низким давлением. Порывы ветра раскачивали наше ветхое пристанище, камнепад же представлял постоянную угрозу для жизни». Однако данные, полученные экспедицией, оправдывали такие жертвы. Установление

(Продолжение см. на с. 29)

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2005 года

Первое место заняли

по математике

Гутник Михаил – Украина, г. Донецк,
лицей «Эрудит»,
Чуклин Александр – Украина, г. Севастополь,
гимназия 1;

по физике

Курдюков Сергей – г. Москва, школа 1195.

Второе место заняли

по математике

Мищенко Павел – Украина, г. Донецк,
лицей «Эрудит»,
Есин Алексей – ст. Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55;

по физике

Успенский Юрий – Украина, г. Днепродзержинск, ТЛ 1,
Гуня Евгений – Украина, г. Днепродзержинск, ТЛ 1,
Пастухов Дмитрий – Белоруссия, г. Витебск, школа 23.

Третье место заняли

по математике

Бударагин Дмитрий – г. Нижний Новгород, лицей 40,
Старченко Артем – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»;

по физике

Светличный Павел – г. Волжский, школа 30,
Афанасьев Александр – г. Владивосток, гимназия 1,
Баранов Артем – г. Каменка, школа 4.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Гуня Евгений – Украина, г. Днепродзержинск, ТЛ 1,
Антохов Роман – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»,
Еремин Алексей – г. Краснодар, школа 47,
Каровски Сергей – г. Старый Оскол, школа 22,
Громазин Владимир – г. Киров, ФМЛ,
Шмаров Владимир – г. Саров, лицей 15,
Трегубенко Антон – Украина, г. Киев, лицей «Научная смена»,
Двинянинов Владислав – г. Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
Хохуля Никита – г. Краснодар, лицей «ИСТЭК»;

по физике

Василенко Денис – г. Армавир, школа 9,
Дьяков Антон – г. Армавир, школа 9,
Василевич Владимир – г. Армавир, школа 9,
Данилов Антон – г. Стерлитамак, ФМЛ 1.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2006 года.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1996» или «Ф2003». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1996, М1997, М2001, М2004 предлагались на XXVII Турнире городов, задачи М1998, М2000 предлагались на IX Кубке памяти А.Н. Колмогорова, задача М1999 предлагалась на XXVI Уральском турнире юных математиков, задача М2005 – на олимпиаде лицея 239 Санкт-Петербурга.

Задачи М1996–М2005, Ф2003–Ф2012

М1996. При каких n найдутся такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что сумма $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}$ – целое число?

А.Шаповалов

М1997. На сторонах прямоугольного треугольника ABC площади 1 построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D, E, F. Докажите, что площадь треугольника DEF не меньше 2.

В.Филимонов, И.Богданов, Ю.Кудряшов

М1998. В одной кучке лежат n камней, а в другой – k камней. Каждую минуту автомат выбирает кучку, в которой число камней четное, и половину имеющихся в ней камней перекладывает в другую кучку (если в обеих кучках четное число камней, то автомат выбирает кучку случайным образом). Если в обеих кучках число камней оказалось нечетным, автомат прекращает работу. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (n, k), не превосходящих 1000, для которых автомат через конечное время обязательно остановится?

А.Гейн

М1999. Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник с двумя другими прямоугольниками имел ровно по одной общей точке, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?

К.Кноп, С.Берлов

М2000. Есть n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза, и каждому из них надевают на голову какой-то колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Мудрецы открывают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается угадать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о совместных действиях таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один из них угадал цвет своего колпака.

Фольклор

М2001. Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что величины углов A, B и C относятся как 4:2:1. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

С.Токарев

М2002*. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{25}{1+48abc}.$$

Я.Алиев

М2003*. а) Докажите, что при любых натуральных a, b, c, n уравнение

$$x^2+y^2+z^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что при любом нечетном $n \geq 3$ и любых натуральных a, b, c уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

в) Докажите, что найдутся такие натуральные a, b, c, что уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^2$$

неразрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

А.Авакян

М2004. У Карлсона имеется 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше чем $1/100$ часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съедать поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

Д.Мусатов

М2005*. Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.

Р.Карасев

Ф2003. Тонкое велосипедное колесо раскрутили вокруг его оси, удерживая ее неподвижной. При этом пришлось совершить работу A и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колеса. Колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность тележки такой же массы, которая может свободно двигаться по гладкому горизонтальному столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет тележку? Колесо во время движения остается вертикальным.

А.Сложнов

Ф2004. На гладком горизонтальном столе находится тележка массой 3 кг, на ее поверхности лежит очень легкий лист бумаги, на нем – груз массой 1 кг. Лист бумаги тянут в горизонтальном направлении силой 10 Н. С каким ускорением движется этот лист, если коэффициент трения между бумагой и каждым из тел составляет 0,7?

А.Старов

Ф2005. Через легкий блок, закрепленный на большой высоте над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка. Концы веревки сложены внизу двумя «бухтами», которые не препятствуют движению. С одной стороны блока за веревку ухватился человек массой $M = 60$ кг, который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки $\rho = 2$ кг/м. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Трение в блоке отсутствует.

А.Повторов

Ф2006. Теплоизолированный сосуд, содержащий гелий при температуре $T_0 = 30$ К, движется со скоростью $v = 1000$ м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после резкой остановки сосуда? Теплообменом газа со стенками сосуда пренебречь. Моль гелия имеет массу $m = 4$ г.

А.Старов

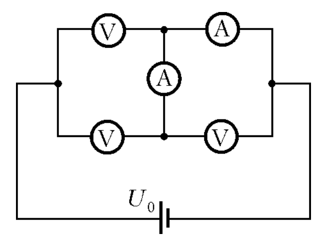
Ф2007. В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве $\nu = 2$ моль. Ей сообщают количество теплоты $Q = 100$ Дж, при этом температура гелия увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Оцените изменение объема газа, считая его теплоемкость в этом процессе постоянной.

А.Газов

Ф2008. Закрепленная неподвижно непроводящая тонкостенная сфера массой M равномерно заряжена по поверхности полным зарядом Q. Из нее вырезают маленький кусочек, масса которого равна $1/10000$ массы сферы, сминают его в крошечный комочек, помещают в центр сферы (заряд кусочка при этом сохраняется) и отпускают. Какая скорость у него будет на большом расстоянии от сферы? А какую скорость он приобретет к моменту вылета из сферы? Силы тяжести отсутствуют.

А.Зильберман

Ф2009. К идеальной батарейке с ЭДС $U_0 = 1{,}3$ В подключена мостиковая электрическая цепь, собранная из трех одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причем один из миллиамперметров включен в диагональ мостика (см. рисунок). Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Определите показания каждого из вольтметров. Сопротивление вольтметра больше, чем у миллиамперметра.



А.Простов

Ф2010. Две одинаковые легкие пружины прикреплены к маленькому массивному телу. Одна из пружин другим концом приклеена к полу, другая пружина – к потолку. Рассмотрим два варианта малых колебаний тела – в вертикальном и горизонтальном направлениях. Найдите отношение периодов таких колебаний. Пружины в положении равновесия вертикальны. Начальные длины пружин считать малыми.

Р.Александров

Ф2011. Параллельно включены катушки с индуктивностями L и $2L$ и резистор сопротивлением R. В данный момент токи через катушки одинаковы по величине, текут в одну сторону и составляют I_0 каждый. Какой полный заряд протечет через резистор за большое время и сколько тепла выделится в резисторе? Указанные элементы цепи считать идеальными, никаких других элементов в цепи нет.

З.Рафаилов

Ф2012. Катушку индуктивности и конденсатор соединили параллельно и подключили к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с амперметром переменного тока (сопротивление амперметра очень мало). Показания амперметра составили при этом 0,015 А. Теперь катушку и конденсатор соединили последовательно и вновь подключили к сети. Напряжение, измеренное на конденсаторе вольтметром (его сопротивление можно считать очень большим), составило 300 В, а напряжение на зажимах катушки оказалось равным 85 В. Считая показания приборов точными, определите по этим данным емкость конденсатора, индуктивность катушки и сопротивление провода, которым намотана катушка. Конденсатор можно считать идеальным, потери в сердечнике катушки очень малы – неидеальность катушки определяется сопротивлением провода, которым она намотана.

А.Длиннов

Решения задач М1976–М1980, Ф1988–Ф1997

М1976. *Пусть N – любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа N, либо числа $3N$ найдется одна из цифр 1, 2, 9.*

Если число N начинается на 1, 2 или 9, то доказывать нечего.

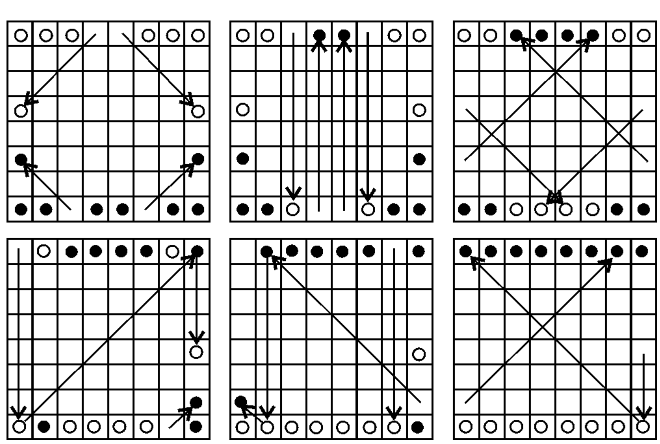
Если число N начинается на 3, 4, 5, 6, 7 или 8 и имеет k цифр, то $3\cdot 10^{k-1} \le N < 9\cdot 10^{k-1}$, поэтому $9\cdot 10^{k-1} \le 3N < 27\cdot 10^{k-1}$, откуда $9\cdot 10^{k-1} \le 3N < 3\cdot 10^{k}$, т.е. число $3N$ либо имеет k цифр и начинается с цифры 9, либо имеет $k+1$ цифру и начинается с цифры 1 или 2.

П.Кожевников

М1977. *В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, передвигая по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей).*

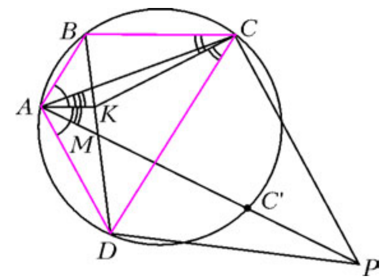
Ответ: за 23 хода.

Из пары ферзей на одной не крайней вертикали тот, кто сходит раньше, должен сделать минимум два хода; 6 таких пар затратят не менее 18 ходов. Из четверки угловых ферзей тот, кто сходит первым, тоже должен сделать минимум два хода, итого еще 5 ходов.



Пример на 23 хода приведен на рисунке (первым ходит черный ферзь).

Э.Лю, С.Дориченко



М1978. *Биссектрисы углов BAD и BCD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. Точка M – середина отрезка BD. Прямая, параллельная AD и проходящая через C, пересекает луч AM в точке P, лежащей вне четырехугольника. Докажите, что $DP = DC$.*

По свойству биссектрисы (см. рисунок), $\frac{AB}{DA} = \frac{BK}{DK} = \frac{BC}{CD}$, поэтому $AB\cdot CD = BC\cdot DA$.

Пусть точка C' симметрична точке C относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD, и прямая AC' пересекает BD в точке M'. Из симметрии $BC = DC'$, $DC = BC'$, отсюда $AB\cdot BC' = AD\cdot DC'$. Четырехугольник $ABC'D$ вписанный, поэтому сумма углов ABC' и ADC' равна 180°. Площади треугольников ABC' и ADC' равны:

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2}AB\cdot BC'\sin\angle ABC' = \frac{1}{2}AD\cdot DC'\sin\angle ADC' = S_{ADC'}.$$

С другой стороны, $S_{ABC'} = \frac{1}{2}AC'\cdot BM'\sin\angle AM'B$, $S_{ADC'} = \frac{1}{2}AC'\cdot DM'\sin\angle AM'D$. Так как $\sin\angle AM'B = \sin\angle AM'D$, то $BM' = DM'$, т.е. M' совпадает с M, и C' лежит на прямой, содержащей точки A, M, P. Поскольку из симметрии дуги BC и DC' равны, то $\angle MAD = \angle CAB = \angle CDB$. Аналогичным образом из условия $AB\cdot CD = BC\cdot DA$ выводятся равенства $\angle MCD = \angle BCA = \angle BDA$.

Так как $CP \parallel AD$, то $\angle ADC = \angle PCD$ и $\angle CPM = \angle MAD$. Из последнего равенства вытекает, что $\angle CPM = \angle MDC$, значит, четырехугольник $CPDM$ вписан в окружность, поэтому $\angle MPD = \angle MCD = \angle MDA$. Окончательно,

$$\angle CPD = \angle CPM + \angle MPD = \angle MDC + \angle MDA = \angle ADC = \angle PCD,$$

т.е. треугольник DCP равнобедренный, и $DP = DC$.

Замечание. Вписанные четырехугольники с равными произведениями противоположных сторон называются *гармоническими*. В таких четырехугольниках диагональ является симедианой (т.е. прямой, симметричной медиане относительно соответствующей биссектрисы) для треугольников, на которые четырехугольник разбит другой диагональю. Это одно из интересных свойств гармонических четырехугольников, которое фактически и использовалось в решении задачи.

В.Шмаров

М1979. *На прямолинейной дороге стоят несколько светофоров. На каждом светофоре красный и зеленый свет горят по равному целому количеству минут (для разных светофоров эти количества могут различаться). Автогонщик в каждый момент либо едет с фиксированной скоростью, либо стоит на красный свет у светофора. Он изучил режим работы светофоров и утверждает, что, выехав в соответствующее время, он может доехать от начала до конца за 30 или 32 минуты, но не может доехать за 31 минуту. Могут ли его слова оказаться правдой? (Если гонщик подъезжает к светофору в момент переключения света, он считает, что свет уже переключился.)*

Ответ: нет, не могут.

Пусть $f(t)$ – время, за которое гонщик доедет до финиша, если он стартует в момент t, и T – наименьшее общее кратное всех периодов работы светофоров. Тогда $f(t+T)=f(t)$, т.е. f периодична с периодом T. Будем считать, что $f(0)=32$. Из периодичности следует, что на отрезке $[0;T]$ найдется точка s, для которой $f(s)=30$. Подберем единицу длины так, чтобы скорость гонщика была равна 1, и рассмотрим график $f(t)$ на отрезке $[0;T]$.

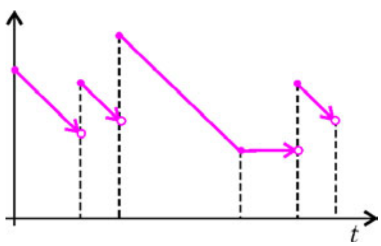


Рис. 1

Лемма. *График представляет собой конечное число отрезков (с выколотыми правыми концами), направленных горизонтально или с угловым коэффициентом −1 (т.е. под углом 135° к оси абсцисс); при этом в точках разрыва происходит скачок вверх (рис.1).*

Доказательство. Индукция по числу светофоров. Если светофоров нет, то функция постоянна. Иначе рассмотрим самый первый светофор и мысленно уберем его. Соответствующая функция $f_1(t)$ для полученной системы светофоров имеет требуемый вид по предположению индукции.

Разобьем всю ось абсцисс на полуинтервалы так, что, выехав во время одного из них, гонщик попадает на фиксированный свет первого светофора («зеленые» и «красные» интервалы). На зеленых интервалах функции f и f_1 совпадают. Пусть $[t_1;t_2)$ – один из красных интервалов. Тогда, выехав в любое время $t\in[t_1;t_2)$, гонщик попадет на красный свет первого светофора и поэтому приедет к финишу в то же время, как если бы выехал во время t_2 (т.е. $f(t)=f(t_2)+(t_2-t)$). При этом $f(t_2)=f_1(t_2)$, так как момент t_2 принадлежит зеленому интервалу. Таким образом, график $f(t)$ получается из $f_1(t)$ заменой части графика, соответствующей $[t_1;t_2]$, на отрезок (рис.2; то же нужно проделать со всеми красными интервалами). Поскольку отрезок, на который мы заменяем, имеет минимальный возможный угловой коэффициент (а именно −1), то заменяемая часть графика $f_1(t)$ может лежать только под новым отрезком или частично совпадать с ним. Поэтому в левом его конце может произойти скачок только вверх. Лемма доказана.

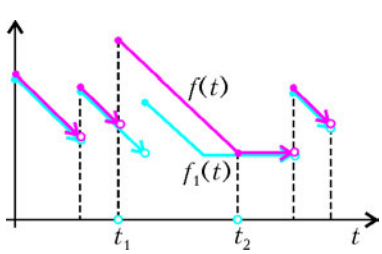


Рис. 2

Завершим решение задачи. Рассмотрим самый левый отрезок, на котором есть точка с ординатой, не большей 31 (такой отрезок найдется, поскольку по условию есть даже точка с ординатой 30). Ордината его левого конца не меньше 31 (иначе, так как скачки происходят только вверх, то и на предыдущем отрезке были ординаты, меньшие 31). Значит, на этом отрезке есть и точка с ординатой 31, что и требовалось.

Замечание 1. Из решения видно, что условие равенства времени зеленого и красного света излишне. На самом деле условие целочисленнности периода работы светофора также не является необходимым. Для того чтобы решить задачу в общем случае, достаточно понять, что какой-то момент старта, при котором гонщик проезжает дорогу меньше чем за 31 минуту, наступит позже, чем момент старта, соответствующим 32 минутам.

Замечание 2. Читатели, знакомые с основами математического анализа, могут найти другое решение, основывающееся на следующей теореме.

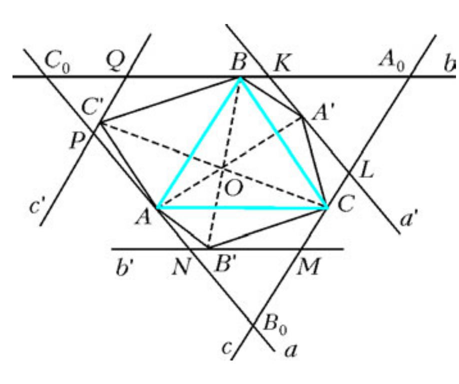
Теорема. *Пусть функция f такова, что $f(x+\varepsilon)\geq f(x)-\varepsilon$ при любом x и любом $\varepsilon>0$ и $f(a)>f(b)$ при некотором $a<b$. Тогда функция на отрезке $[a;b]$ принимает все значения от $f(b)$ до $f(a)$.*

И. Богданов

М1980. *Докажите, что любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый центрально-симметричный шестиугольник площади 4/3.*

Пусть $\mathcal{M}$ – данный выпуклый многоугольник, и O – его центр симметрии.

Среди всех треугольников с вершинами в вершинах многоугольника $\mathcal{M}$ выберем треугольник ABC наибольшей площади. Проведем через вершины A, B, C прямые a, b, c, параллельные BC, CA, AB соответственно (см. рисунок). Пусть прямые a, b, c образуют в пересечении треугольник $A_0B_0C_0$; таким образом, треугольник ABC образован средними линиями треугольника $A_0B_0C_0$. Предположим, что некоторая вершина X многоугольника $\mathcal{M}$ лежит в той полуплоскости относительно a, которая не содержит BC. Тогда рассто-



яние от X до BC будет больше, чем расстояние от A до BC, тем самым, площадь S_{XBC} будет больше, чем S_{ABC}, вопреки выбору треугольника ABC. Следовательно, предположение неверно, и все вершины $\mathcal{M}$ лежат в одной полуплоскости с BC относительно a. Аналогично доказываем, что все вершины $\mathcal{M}$ лежат в одной полуплоскости с CA относительно b и в одной полуплоскости с AB относительно c. Это означает, что все вершины $\mathcal{M}$ (и, следовательно, сам многоугольник $\mathcal{M}$) содержатся в треугольнике $A_0B_0C_0$.

Рассмотрим вершины A', B', C' многоугольника $\mathcal{M}$, симметричные вершинам A, B, C относительно O, а также прямые a', b', c', симметричные прямым a, b, c относительно O. По доказанному, A' лежит в треугольнике $A_0B_0C_0$, а из симметрии вытекает, что все вершины $\mathcal{M}$ лежат по одну сторону от a'. Поэтому прямая a' пересекает отрезки A_0B и A_0C в некоторых точках K и L (точка A' лежит на отрезке KL). Аналогично, прямая b' пересекает отрезки B_0C и B_0A в некоторых точках M и N, прямая c' пересекает отрезки C_0A и C_0B в некоторых точках P и Q. Многоугольник $\mathcal{M}$ содержится в пересечении полос, образованных прямыми a и a', b и b', c и c', т.е. в шестиугольнике $KLMNPQ$. Этот шестиугольник имеет центр симметрии O, поскольку пары противоположных сторон симметричны относительно O.

Докажем, что $KLMNPQ$ – искомый шестиугольник, оценив его площадь. Пользуясь тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, запишем равенства для площадей: $S_{A'OB} = S_{AOB}$, $S_{A'OC} = S_{AOC}$, $S_{B'OC} = S_{BOC}$, $S_{B'OA} = S_{BOA}$, $S_{C'OA} = S_{COA}$, $S_{C'OB} = S_{COB}$. Сложив эти равенства, получим $S_{AC'BA'CB'} = 2S_{ABC}$. Так как многоугольник $\mathcal{M}$ содержит шестиугольник $AC'BA'CB'$, то $S_{AC'BA'CB'} \le 1$, следовательно, $S_{ABC} \le \frac{1}{2}$ и $S_{A_0B_0C_0} = 4S_{ABC} \le 2$.

Пользуясь подобием треугольников $A_0B_0C_0$, A_0LK, MB_0N и QPC_0, можно положить $x = \frac{A_0K}{A_0C_0} = \frac{A_0L}{A_0B_0} = \frac{KL}{B_0C_0}$, $y = \frac{B_0M}{B_0A_0} = \frac{B_0N}{B_0C_0}$, $z = \frac{C_0P}{C_0B_0} = \frac{C_0Q}{C_0A_0}$, кроме того, $S_{A_0KL} = x^2S_{A_0B_0C_0}$, $S_{B_0MN} = y^2S_{A_0B_0C_0}$, $S_{C_0PQ} = z^2S_{A_0B_0C_0}$. Заметим, что

$$B_0C_0 = B_0N + NP + PC_0 = B_0N + KL + PC_0 = y \cdot B_0C_0 + x \cdot B_0C_0 + z \cdot B_0C_0,$$

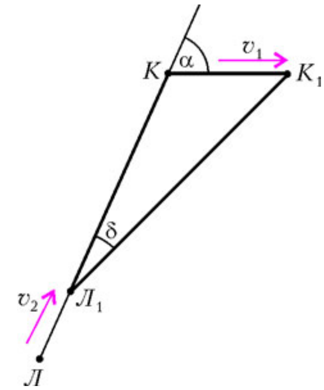
откуда $x + y + z = 1$. Далее,

$$S_{KLMNPQ} = S_{A_0B_0C_0} - S_{A_0KL} - S_{B_0MN} - S_{C_0PQ} = \left(1 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)S_{A_0B_0C_0}.$$

По неравенству о средних, $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$, следовательно, $S_{KLMNPQ} \le \frac{2}{3}S_{A_0B_0C_0} \le \frac{4}{3}$.

И.Богданов, П.Кожевников

Ф1988. *Кролик бежит по прямой с постоянной скоростью v_1, за ним по плоскости гонится лиса. Скорость лисы v_2 постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент кролик. В некоторый момент расстояние между участниками забега составляет L, а угол между векторами их скоростей равен α. Найдите ускорение лисы в этот момент.*



Скорость лисы по модулю не меняется, ее ускорение связано с поворотом вектора $\vec{v}_2$. Найдем угол поворота δ (см. рисунок) за очень малый интервал времени τ: расстояние $КЛ$ уменьшается до $К_1Л_1 = L - (v_2 - v_1\cos\alpha)\tau$. По теореме синусов,

$$\frac{KK_1}{\sin\delta} = \frac{К_1Л_1}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \text{ или } \frac{L - (v_2 - v_1\cos\alpha)\tau}{\sin\alpha} = \frac{v_1\tau}{\sin\delta}.$$

Отсюда находим угол поворота:

$$\sin\delta = \frac{v_1\tau\sin\alpha}{L - (v_2 - v_1\cos\alpha)\tau}$$

и ускорение лисы:

$$a = \frac{v_2\delta}{\tau} \approx \frac{v_2\sin\delta}{\tau} = \frac{v_1v_2\sin\alpha}{L - (v_2 - v_1\cos\alpha)\tau} \approx \frac{v_1v_2\sin\alpha}{L}.$$

А.Лисов

Ф1989. *В системе на рисунке 1 ось верхнего блока закреплена, а сам этот блок склеен из двух блоков разных радиусов – один из радиусов ровно вдвое больше другого. Радиусы подвижных блоков подобраны так, что свисающие концы нити вертикальны. Масса маленького груза справа наверху равна M; на нити, намотанной на малый диаметр верхнего блока, закреплен груз массой $3M$; масса нижнего груза $2M$. Систему вначале удерживают, затем отпускают, и начинается движение. Найдите ускорения подвижных блоков. Во сколько раз отличаются угловые ускорения верхнего (двойного) и самого нижнего блоков?*

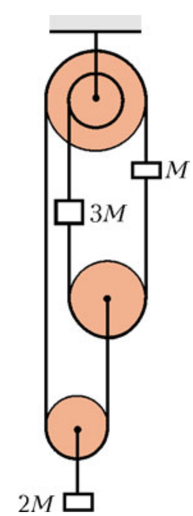


Рис. 1

Введем обозначения: T – натяжение нити слева и справа от верхнего блока (считаем, что трения нити о блок нет), F – натяжение нити на малом диаметре верхнего блока, a – ускорение груза массой $3M$, b – ускорение среднего блока (рис. 2). Остальные силы легко выражаются через T. Ускорения тел тоже легко выразить: груз массой $2M$ имеет ускорение, равное $\frac{a-b}{2}$ и направленное вниз; груз массой M имеет ускорение, равное $2b - a$ и также направленное вниз.

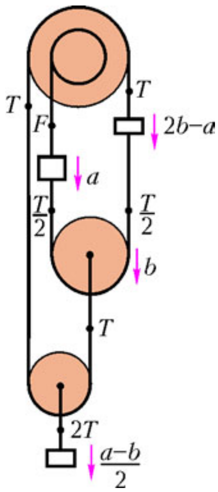


Рис. 2

Ясно, что $F = 0$ (верхний блок очень легкий, так что суммарный момент сил должен быть нулевым). Запишем уравнения для грузов:

$$2Mg - 2T = 2M \cdot \frac{a-b}{2},$$

$$3Mg + \frac{T}{2} = 3M \cdot a,$$

$$Mg + \frac{T}{2} - T = M \cdot (2b - a).$$

Отсюда находим

$$a = \frac{8}{7}g, \quad b = \frac{6}{7}g, \quad \frac{a-b}{2} = \frac{1}{7}g,$$

$$T = \frac{6}{7}Mg.$$

Если радиус внутреннего верхнего блока R, то радиус нижнего блока $1{,}25R$. Угловое ускорение верхнего блока (если нить не проскальзывает по блоку) равно

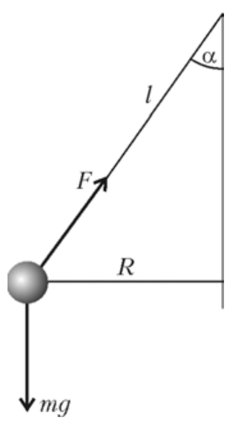
$$\varepsilon_1 = \frac{2b-a}{2R} = \frac{2}{7}\frac{g}{R}.$$

Угловое ускорение самого нижнего блока составляет

$$\varepsilon_2 = \frac{b - \frac{a-b}{2}}{1{,}25R} = \frac{4}{7}\frac{g}{R} = 2\varepsilon_1.$$

А.Зильберман

Ф1990. *На тонкой легкой нити к потолку подвешен маленький шарик массой M; период малых колебаний получившегося маятника равен T_0. Шарик отводят в сторону и толчком придают ему начальную скорость – такую, что он описывает окружность, лежащую в горизонтальной плоскости. Каким может быть время одного оборота, если нить выдерживает натяжение не более $10Mg$?*



Радиус окружности, по которой движется шар, равен $R = l\sin\alpha$, где l – длина нити (см. рисунок). Запишем уравнения движения шарика по вертикали:

$$F\cos\alpha - mg = 0$$

и по горизонтали:

$$F\sin\alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 l\sin\alpha, \text{ или } \omega^2 = \frac{F}{ml}.$$

Период обращения равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{mg}{F}}.$$

Если угол взять малым, то

$$F \approx mg \text{ и } T_1 \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В предельном случае, когда $F = 10mg$, мы получим

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{10}}.$$

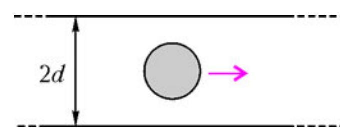
Итак,

$$\frac{T_0}{\sqrt{10}} \le T \le T_0.$$

П.Шаров

Ф1991. *В компьютерной модели по дну квадратной коробки площадью 1 м^2 скользят две одинаковые шайбы радиусом 1 см. Скорости шайб по величине все время равны 1 м/с, а направление скоростей меняется случайным образом при столкновениях шайб со стенками коробки и между собой. Оцените, за какое время произойдет 1000 ударов между шайбами. Сколько раз за это время шайбы ударятся о все стенки коробки?*

Как обычно, рассмотрим «заметаемую» площадь – полосу шириной $2d$, где d – диаметр шайбы (см. рисунок). Если центр другой шайбы попадет в эту полосу, произойдет удар.



Для числа ударов $N_1 = 10^3$ время τ найдем из условия

$$v_0\tau \cdot 2d = N_1 a^2,$$

где $a = 1$ м – сторона квадратного дна коробки, откуда

$$\tau = \frac{N_1 a^2}{2dv_0} = \frac{10^3 \cdot 1 \text{ м}^2}{2 \cdot 0{,}02 \text{ м} \cdot 1 \text{ м/с}} = 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ с}.$$

Число ударов *об одну* из стенок за это время составит

$$\frac{1}{4}N_2 = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}}\tau}{2a} = \frac{v_0}{2\sqrt{2}a}\frac{N_1 a^2}{2dv_0} = N_1\frac{a}{4\sqrt{2}d},$$

а число ударов *о все* стенки будет равно

$$N_2 = N_1\frac{a}{\sqrt{2}d} \approx 35N_1 = 3{,}5 \cdot 10^5.$$

При расчете соударений мы не учли движения второй шайбы, но для грубой оценки это вполне допустимо.

А.Ударов

Ф1992. *Цикл Карно 1–2–3–4–1 (рис.1), проводимый с порцией идеального газа, имеет термодинамический КПД η_0. Цикл разделили на два – первый 1–2–4–1 и второй 4–2–3–4 (процесс 4–2 идет при повышении давления и объема газа, и зависимость давления от объема на этом участке линейная). Известен термодинамический КПД первого цикла (1–2–4–1), он равен η_1. Найдите аналогичный КПД второго цикла.*

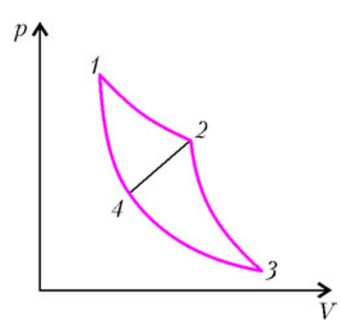


Рис. 1

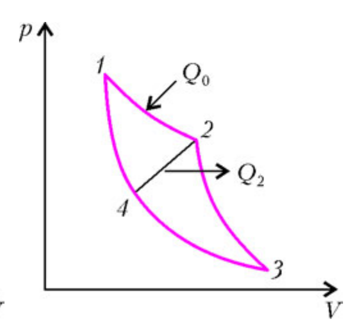


Рис. 2

Введем обозначения (рис.2): Q_0 – количество теплоты, полученное на участке *1–2*, Q_2 – количество теплоты, отдаваемое в первом цикле на участке *2–4*. Тогда работа в первом цикле равна $A_1 = Q_0 - Q_2$, а КПД составляет

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_0} = \frac{Q_0 - Q_2}{Q_0}, \text{ откуда } Q_2 = Q_0(1-\eta_1).$$

Для второго цикла КПД равен

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2} = \frac{A_2}{Q_0(1-\eta_1)}.$$

Выразим величину работы A_2:

$$A_2 = A_{\text{общ}} - A_1 = Q_0\eta_0 - Q_0\eta_1 = Q_0(\eta_0 - \eta_1).$$

Тогда окончательно

$$\eta_2 = \frac{Q_0(\eta_0-\eta_1)}{Q_0(1-\eta_1)} = \frac{\eta_0-\eta_1}{1-\eta_1}.$$

Ц.Карнов

Ф1993. *Из очень тонкой проволоки сделали окружность, припаяли диаметр из такой же проволоки и еще один диаметр – перпендикулярно первому. Середины «диаметральных» проволочек соединили между собой. Один из выводов омметра присоединили к произвольной точке окружности, другой – к диаметрально противоположной ее точке. Во сколько раз отличаются максимальное и минимальное значения показаний прибора?*

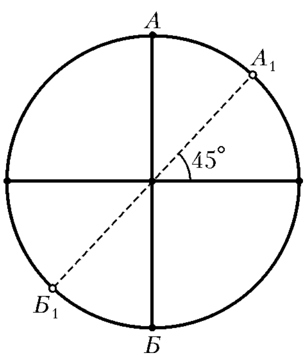


Рис. 1

Можно выбрать на окружности произвольную точку и честно посчитать получившееся сопротивление – это не слишком сложно, но очень нудно…

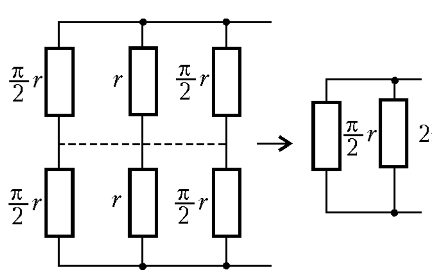


Рис. 2

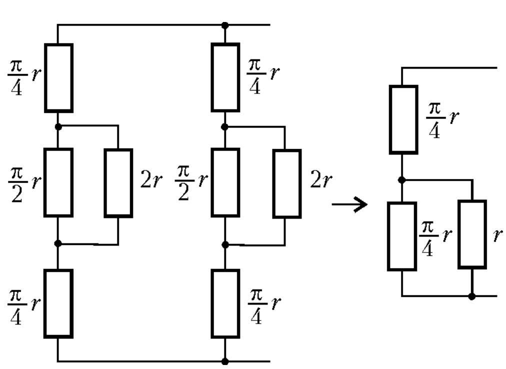


Рис. 3

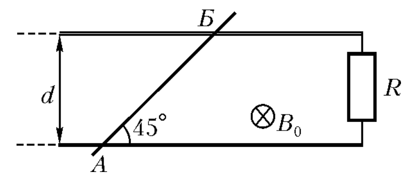
Ясно, что нужно посчитать случаи подключения к точкам $АБ$ и $А_1Б_1$ (рис.1).

Обозначим сопротивление проволочки-радиуса буквой r, тогда «четвертушка» окружности имеет сопротивление $\frac{\pi}{2}r$. Для подключения $АБ$ эквивалентная схема изображена на рисунке 2. Аналогично, для подключения $А_1Б_1$ эквивалентная схема приведена на рисунке 3. Таким образом,

$$\frac{R_{АБ}}{R_{А_1Б_1}} = \frac{8}{\pi+8} \approx 0{,}72.$$

О.Простов

Ф1994. *Параллельные проводящие рельсы расположены горизонтально на расстоянии d друг от друга и помещены в однородное магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}_0$ направлен перпендикулярно их плоскости. Рельсы замкнуты резистором большого сопротивления R. Вдали от резистора на рельсах лежит массивный проводящий стержень, он составляет угол 45° с рельсами. С какой силой нужно действовать на стержень в горизонтальном направлении, чтобы он скользил вдоль рельсов поступательно с постоянной скоростью v_0?*



Найдем ток, который будет протекать в контуре (см. рисунок). Пренебрегая самоиндукцией (R – велико), получим

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = |\Phi'| = B_0v_0d, \qquad I = \frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{B_0v_0d}{R}.$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно стержню $АБ$ и равна

$$F = IB_0d\sqrt{2}.$$

По горизонтали нужно действовать силой

$$F_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{B_0^2v_0d^2}{R}$$

(и с такой же силой – в перпендикулярном направлении).

З.Рафаилов

Ф1995. *Параллельно друг другу подключены две катушки, индуктивности которых 1 Гн и 2 Гн, и конденсатор емкостью 100 мкФ. Конденсатор в данный момент заряжен до напряжения 200 В, а через катушки текут одинаковые (и одинаково направленные) токи по 0,1 А. Найдите максимальный ток через катушку индуктивностью 1 Гн. Оцените, через какое время напряжение конденсатора изменит знак на противоположный (можно было бы посчитать и точно, но расчет получился бы довольно громоздким). Элементы цепи считайте идеальными.*

Максимальный (и минимальный) ток через катушку соответствует нулевой ЭДС индукции – конденсатор в такие моменты разряжен. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, можно записать (см.

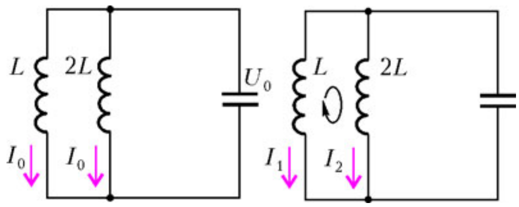


рисунок)

$$\frac{LI_0^2}{2}+\frac{2LI_0^2}{2}+\frac{CU_0^2}{2}=\frac{LI_1^2}{2}+\frac{2LI_2^2}{2}.$$

В контуре $L-2L$ магнитный поток сохраняется (сверхпроводящий контур), т.е.

$$2LI_0-LI_0=2LI_2-LI_1,$$

откуда

$$I_2=\frac{I_0+I_1}{2}.$$

После преобразований из первого уравнения получаем

$$3I_1^2+2I_0I_1-5I_0^2-\frac{2CU_0^2}{L}=0.$$

Отсюда

$$I_{1\max}=\frac{\left|-I_0-\sqrt{I_0^2+15I_0^2+\dfrac{6CU_0^2}{LI_0^2}}\right|}{3}\approx 1{,}7\ \text{А}.$$

Энергия конденсатора в начальном состоянии во много раз больше, чем энергия катушек. Следовательно, искомый интервал времени практически равен половине периода колебаний:

$$\tau=\pi\sqrt{L_{\text{экв}}C}=\pi\sqrt{\frac{2}{3}LC}\approx 0{,}026\ \text{с}.$$

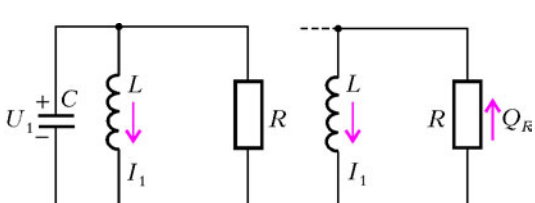
Р.Александров

Ф1996. *Конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены друг с другом, и в получившемся контуре происходят колебания. В тот момент, когда напряжение конденсатора составляло U_1, а через катушку тек ток I_1, параллельно контуру подключили резистор сопротивлением R. Какое количество теплоты выделится в резисторе? Какой заряд протечет через катушку, начиная с этого момента?*

С энергией, переходящей в тепло, все ясно – вся энергия контура «уйдет» в тепло:

$$\frac{CU_1^2}{2}+\frac{LI_1^2}{2}=W_{\text{тепл}}.$$

Теперь – второй вопрос задачи. За малый промежуток времени Δt через резистор протечет заряд $\Delta q_i=\frac{\mathcal{E}_{\text{инд}\,i}}{R}\Delta t$, а суммарный заряд через резистор



составит

$$\sum\Delta q_i=\frac{-\sum\Delta\Phi_i}{R}=-\frac{L}{R}\left(I_{\text{кон}}-I_{\text{нач}}\right)=\frac{LI_1}{R}.$$

Куда протек заряд, тоже ясно – достаточно взять очень малое C. Конденсатор «потерял» заряд $Q_C=CU_1$, через резистор протек заряд $Q_R=\frac{LI_1}{R}$, поэтому, с учетом знаков, заряд через катушку равен

$$Q_L=CU_1+\frac{LI_1}{R}.$$

Ответ получен для случая, изображенного на рисунке. Величины U_1 и I_1 могут быть и отрицательными!

А.Зильберман

Ф1997. *К точка А и Б схемы, изображенной на рисунке 1, подключают источник переменного напряжения 36 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр с большим внутренним сопротивлением, если включить его между точками Б и В? Конденсаторы в схеме имеют емкости, например, 1 мкФ. Диоды можно считать идеальными. Придумайте также хорошее название для этой схемы.*

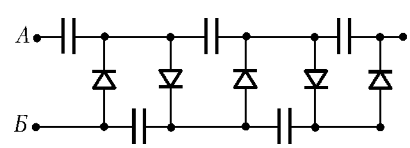


Рис. 1

На рисунке 2 мы ввели некоторые обозначения, потенциал точки *Б* будем считать нулевым (это не влияет на ответ!). Через диод *1* первый из конденсаторов зарядится до $U_0\approx 50$ В. При этом потенциал точки B_1 будет меняться вместе с потенциалом точки *А* (рис.3), но при этом

$$\varphi_{B_1}-\varphi_A=U_0.$$

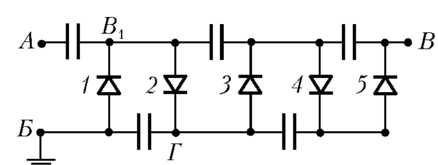


Рис. 2

Максимальное значение этого потенциала составит $2U_0\approx 100$ В.

Через диод *2* второй конденсатор будет заряжен до этого потенциала, т.е. $\varphi_Г=2U_0$. Легко видеть, что и остальные конденсаторы таким же образом будут заряжены через соответствующие диоды, и потенциал точки *В* («выход» схемы) составит примерно $5U_0=250$ В (если диоды и в самом деле идеальные!).

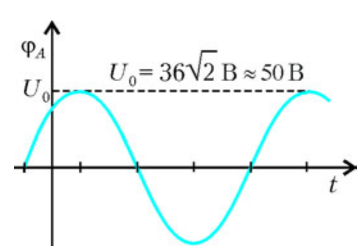


Рис. 3

Все это справедливо, если сопротивление вольтметра («нагрузка») достаточно велико, т.е. $CR_V\gg\frac{1}{f}=0{,}02$ с. Например, если $R_V=1$ МОм, то это условие выполняется хорошо.

Такую схему называют «выпрямитель с умножением напряжения», или просто «умножитель», и используют для получения высоких напряжений.

У.Множителев

Задачи

1. Профессор Мумбум-Плюмбум придумал новый замечательный отрезок. А именно: проведенный внутри треугольника отрезок называется *мумбианой*, если он делит исходный треугольник на два равных между собой треугольника. Докажите, что на самом деле мумбиана является медианой.

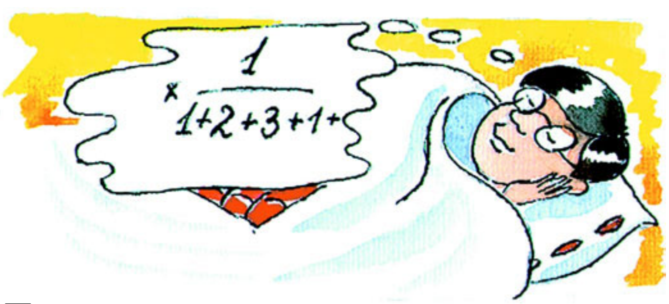
А. Кремнев (ученик 7 кл.)

2. Чему равна сумма

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+2006}?$$

Я.Камыш



3. В зоомагазине в 17 клетках находятся 44 чижа, при этом никакая клетка не является пустой. Обязательно ли найдутся 5 клеток, в которых число чижей одинаково?

В.Произволов

4. Возвратившись из путешествия, Гулливер рассказывал:

— После того как мне удалось примирить Лилипутию и Блефуску, между некоторыми городами этих стран организовались международные морские рейсы. В

каждой стране по 111 портовых городов — мелких и крупных. Каждый крупный город связан рейсами более чем с половиной городов другого государства, а каждый мелкий город — менее чем с половиной. Оказалось, что в Лилипутии есть крупный город, не связанный рейсами ни с каким крупным городом Блефуску, и есть мелкий город, связанный со всеми мелкими городами Блефуску. Не ошибся ли Гулливер?

И.Акулич

5. Какая минимальная длина ленточки (без учета «бантика») потребуется для перевязки коробки конфет размером $21\times15\times3$ (в сантиметрах) «подарочным» способом?

А.Ряховский

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Капризные числа

А.ЖУКОВ

— ПАПА, ДЛЯ ЧЕГО СЛУЖИТ КНОПКА «ВЫЗОВ ПОРЯДка»? — однажды спросила меня маленькая дочь, когда я пытался объяснить ей, как пользоваться калькулятором «Электроника Б-36» (это давняя история, сейчас эти сослужившие верную службу электронные помощники перекочевали из витрин магазинов в музеи). После моих высоконаучных объяснений [1] она протяженно так произнесла:

— А-а-а, а я думала — чтобы цифры не баловались...

Некоторые числа и в самом деле демонстрируют нам свой непростой норов. Ответьте, пожалуйста, на такой вопрос: квадрат какого числа равен 603729? Проверено, что многие в поисках ответа тянутся к калькулятору (куда только не встроены эти устройства — даже в мобильные телефоны) и после нескольких шустрых манипуляций с кнопками безмятежно выдают ответ: 777. А между тем, ответ этот неполный. Еще в XII веке индийский математик Бхаскара писал: «Квадрат как положительного, так и отрицательного числа дает положительное число, и потому квадратный корень из положительного числа имеет два значения: положительное и отрицательное».

Иллюстрация Н.Суворовой

— Ах да, как это я упустил из виду? — обычно говорит в таком случае собеседник.

— Хорошо, а можете ли вы объяснить, почему произведение отрицательных чисел является положительным числом?

— Ну как — почему? Минус на минус дает плюс!

— Все верно, это правило озвучил еще Лука Пачоли (1445—1514): «Meno via meno sempre fa piu». Но почему минус на минус дает плюс?

Редко кто может вразумительно ответить на последний вопрос, не ссылаясь на знаменитое правило Пачоли или на поговорку, придуманную изобретательным профессором Парижского университета Пьером Рамусом (1515—1572): «Недруг моего недруга — мне друг». Эта поговорка действительно прелестна и помогает запомнить трудновоспроизводимый нашим образным мышлением факт. Рамусу принадлежит также короткое «доказательство» правила знаков при умножении отрицательных чисел: «E duabus negates fit affirmativus» — «Два отрицания составляют утверждение». Именно с этим «доказательством» Рамуса связывают появление впоследствии эпитета «отрицательные» в названии обсуждаемых нами чисел.

О том, с какими огромными трудностями происходило постижение роли отрицательных чисел в математике, рассказано в краткой исторической справке в конце статьи.

Для объяснения загадочного «правила знаков» начнем с простенького уравнения (нынешние шестиклассники с ним справятся играючи)

$$2 + x = 1. \qquad (*)$$

Давайте немного пофантазируем — представим, как это уравнение могли бы решать представители различных эпох.

Архимед (ок. 287—212 до н.э.): Нет такого числа x, которое удовлетворяло бы уравнению $(*)$.

---

[1] *Речь шла о так называемой экспоненциальной форме представления чисел. Например, число 0,001 можно записать так: $1 \cdot 10^{-3}$. В этой записи показатель степени -3 является порядком.*

Диофант (III в.): $x = 1 - 2$, однако отрицательное решение недопустимо.

Брахмагупта (598–ок. 660): $x = 1 + (-2) = -1$, ибо сумма имущества и превосходящего его долга равна новому долгу.

Бхаскара (1114–1185): $x = -1$, но это решение не годится.

Никола Шюке (1445–1500): $x = -1$. Вычисление это, которое другие считают невозможным, верно.

Франсуа Виет (1540–1603): Уравнение ($*$) не имеет корней.

Томас Гарриот (1560–1621): Алгебраические уравнения могут иметь лишь положительные решения, поэтому уравнение ($*$) не имеет корней.

Альбер Жирар (1595–1632): $x = -1$ – это является решением, поскольку всякое алгебраическое уравнение имеет столько корней, какова его степень.

Фрэнсис Мазер (1731–1824): Уравнение ($*$) не имеет корней. Чрезвычайно желательно не допускать отрицательные корни в алгебру, а если таковые все же возникнут, неукоснительно изгонять их.

Итак, первое, что нам нужно сделать, это признать право на существование наряду с положительными числами также и отрицательных чисел. Отныне и впредь объявим, что всякое уравнение вида

$$a + x = b, \qquad (**)$$

где a и b – *произвольные* положительные числа, всегда имеет – и притом *единственное* – решение. Этим вердиктом мы, ни много ни мало, узакониваем факт существования отрицательных чисел. Это будут такие числа, которые удовлетворяют уравнению ($**$) при положительных a и b, когда $b < a$.

Вдохновленные успехом, пойдем дальше. Почему, собственно, числа a и b обязательно должны быть положительными? Разрешим и им быть отрицательными. И пусть уравнение ($**$) *всегда имеет* – и притом *единственное* – решение как для положительных, так и для отрицательных чисел a и b. (А почему бы и нет?) Операцию разности $x = b - a$, которую мы ранее безбоязненно применяли для положительных чисел a и b, когда $b > a$, точно так же безбоязненно распространим и на случай $b < a$, причем a и b теперь могут быть как положительными, так и отрицательными. Подчеркнем, что под разностью $b - a$ мы понимаем такое число x, для которого выполняется равенство $a + x = b$.

Далее на волне смелых обобщений вспомним, что операции сложения и умножения для положительных чисел подчинялись естественным законам:

$$a + b = b + a, \qquad (\mathrm{I})$$

$$ab = ba, \qquad (\mathrm{II})$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad (\mathrm{III})$$

$$a(bc) = (ab)c, \qquad (\mathrm{IV})$$

$$(a + b)c = ac + bc. \qquad (\mathrm{V})$$

Потребуем, чтобы этим же законам подчинялись также операции сложения и умножения на *всем* множестве рассматриваемых нами чисел.

Пора перевести дух. Избегая ложной скромности, описанное нами множество чисел мы назовем множеством действительных или вещественных чисел и обозначим R (от латинского слова Realis – действительный, существующий). Оказывается, увлекшись строительством числового мироздания, мы невольно создали все необходимые предпосылки для появления правила знаков «минус на минус дает плюс».

Все вышесказанное вполне мог бы привести в своей гипотетической беседе с Лукой Пачоли современный студент. Далее представим беседу нашего студента с этим достопочтенным профессором средневековых университетов Болоньи, Рима, Неаполя, Флоренции и Милана, видным европейским алгебраистом, другом Леонардо да Винчи.

Студент. Сначала выведем любопытные следствия из всего вышесказанного – они нам, как в сказке, в конце здорово помогут.

1) В множестве R существует ноль – такое число 0, что для любого числа a, принадлежащего R, выполняется равенство

$$a + 0 = a$$

(в силу (I) это равносильно равенству $0 + a = a$).

Лука Пачоли. Что тут доказывать? Мы и так знаем, что ноль существует.

Студент. Да, но здесь существование нуля с необходимостью вытекает из сделанных выше допущений – факт интересный сам по себе, а его доказательство вполне соответствует отточенному стилю современной алгебры.

Лука Пачоли. Хорошо, я принимаю правила вашей игры, хотя, признаюсь, от меня это потребует немалых усилий.

Студент. Взяв произвольное число a, мы замечаем, что $a + (a - a) = a$. Вы со мной согласны?

Лука Пачоли. Да, конечно. Ведь взятие разности $b - a$ мы трактуем как нахождение такого числа x, которое удовлетворяет равенству $a + x = b$, предполагая, что это уравнение всегда имеет единственное решение. В случае $b = a$ как раз и получаем $x = a - a$.

Студент. Прекрасно, т.е. число $a - a$ вполне подходит на роль нуля.

Лука Пачоли. Но, может быть, это число $a - a$ является нулем только для числа a?

Студент. Замечательный вопрос! Действительно, нужно убедиться, что число $a - a$ на самом деле является нулем для всех введенных нами чисел. Может показаться удивительным, но это так. Проверим его действие на другом числе b № a. Прибавим $(a - a)$ слева к b и учтем, что по определению разности $(b - a)$ число b можно заменить на величину $a + (b - a)$:

$$(a - a) + b = (a - a) + a + (b - a).$$

Лука Пачоли. Ну, а число $(a - a) + a$, в свою очередь, равно a, поэтому наш результат равен $a + (b - a) = b$, т.е., подытоживая, получаем $(a - a) + b = b$. Да, число $(a - a)$ на самом деле подходит на роль нуля для любого числа b.

Студент. Итак, ноль определяется однозначно, даже если мы положим $0 = a - a$, где a – *произвольное* число множества R. Это замечательно – все-таки хорошо, что ноль у нас один, а не много всяких разных. Коль скоро ноль один-единственный, то понятно, почему мы для его обозначения используем единый хорошо всем знакомый символ 0.

Пойдем дальше.

2) Для операции *разности* выполняется закон, родственный закону (V):

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Лука Пачоли. Конечно, трудно было ожидать чего-то другого.

Студент. Но проверим. По определению разности, имеем $b + (a - b) = a$. Умножим обе части этого равенства на c:

$$bc + (a - b)c = ac.$$

Лука Пачоли. Опять же, по данному вами определению разности, отсюда следует доказываемое равенство.

Студент. Замечательно. Дальше я хочу обратить ваше внимание на то, что ноль служит своеобразным «зеркалом», которое позволяет для каждого числа найти его «зеркальную» пару – противоположное ему число. Мы будем говорить, что для числа a число $(-a)$ является ему противоположным, если выполняется равенство $a + (-a) = 0$. Кстати, какова «зеркальная» пара для числа $(-(-a))$?

Лука Пачоли. В силу зеркальной симметрии таковым следует признать число a.

Студент. Превосходно. Я уточню, что зеркальная симметрия в данном случае означает полное равноправие слагаемых в равенстве $a + (-a) = 0$. Каждое из них является противоположным одно другому. Теперь у нас появилась благоприятная возможность записать число $b - a$ в виде $b + (-a)$. Действительно,

$$\left(b + (-a)\right) + a = b + \left((-a) + a\right) = b + 0 = b.$$

Лука Пачоли. Вижу: осталось лишь воспользоваться определением разности. Прекрасно. Для полноты рассуждения следует отметить, что в этом доказательстве использовались свойства (III), (I), а также несколько ранее доказанных свойств.

Студент. А теперь выскажитесь по поводу такого свойства:

3) Для любого числа a

$$a \cdot 0 = 0.$$

Лука Пачоли. Безусловно, для меня это не новость, но будем верны избранной стезе, выводя очевидное из простого, но менее очевидного. Для произвольного вспомогательного числа x имеем

$$a \cdot 0 = a(x - x) = ax - ax = 0.$$

Студент. Великолепно! Последний «аккорд»:

4) Для любых чисел a и b справедливо равенство

$$(-a)b = -ab.$$

Лука Пачоли. В самом деле:

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0,$$

осталось лишь воспользоваться определением разности и свойством нуля.

Студент. Ну вот, наконец-то мы у цели: «минус на минус дает плюс»!

Лука Пачоли. Действительно:

$$(-a)(-b) = -\left(a \cdot (-b)\right) = -(-ab) = ab.$$

Да, молодой человек, я отдаю должное высочайшей утонченности приведенных вами умозрительных построений.

Студент. Таков современный взгляд на алгебраическую природу чисел. Правило знаков получило свое четкое обоснование лишь после того, как математики стали исследовать алгебраические операции, изучать множества и структуры чисел.

Историческая справка

Древние греки не владели отрицательными числами. Вычитание из меньшего числа большего у них было невозможно. В Индии VI–XI веков отрицательные числа систематически использовались для решения задач, однако работы индийских математиков оказали мало влияния на развитие европейской алгебры. Михаэль Штифель (1487–1567) хотя и называл отрицательные числа «нелепыми числами» (numeri absurdi), но уже представлял себе отрицательное число как «меньше, чем ничто» (ficti infra nihil). Изобретатель буквенной алгебры Франсуа Виет и его друг Томас Гарриот не признавали отрицательных корней уравнений. Одним из первых европейских математиков, допускавших существование таких корней, был Джироламо Кардано (1501–1576), хотя и называвший отрицательные числа «придуманными» (numeri ficti) в противовес числам настоящим (numeri veri). Роль отрицательных чисел в упрощении буквенных уравнений осознавал голландский математик Альберт Жирар. Общепризнанными в алгебре отрицательные числа фактически стали после выхода в свет «Геометрии» (1637) Рене Декарта (1596–1650), где они получили реальное истолкование в виде направленных ординат.

Термины отрицательные числа (numerus negativus) и положительные числа (numerus positivus) начали появляться в XVI веке. Совместно впервые они были употреблены французским математиком де Богтаном в 1638 году.

Природа отрицательных чисел оживленно обсуждалась в течение XVIII–XIX столетий. В этой дискуссии принимали участие Леонард Эйлер (1707–1783), Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), Колин Маклорен (1698–1746) и другие. Пьер Симон Лаплас (1749–1827) утверждал, что «правило знаков содержит в себе некоторые трудности». В литературе известно множество правдоподобных, но некорректных доказательств этого правила. Строгая трактовка понятия отрицательного числа была дана в XIX веке, главным образом благодаря работам Германа Грассмана (1809–1877), Уильяма Гамильтона (1805–1865). Дальнейшее развитие теории алгебраических структур, обобщающих понятие числа, произошло в работах Карла Вейерштрасса (1815—1897), Рихарда Дедекинда (1831—1916), Давида Гильберта (1863—1943) и других.

Найдите ошибку в следующих рассуждениях

Парадокс Антуана Арно (1612—1694). Известно, что если две дроби равны и в первой дроби числитель больше знаменателя, то и во второй дроби числитель должен быть больше знаменателя. Значит, если $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, то $-1 > 1$.

Парадокс Джона Валлиса (1616—1703). Очевидно, что $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, поэтому $\ldots \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} \ldots$ Значит, $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$, или $\infty < -1$.

Хорхе Хуан де Сантасилья

(Начало см. на с. 15)

размеров и формы Земли позволило впредь точно определять широту и долготу местонахождения путешественников. По сути, Хорхе Хуан де Сантасилья и Антонио де Уллоа уточнили около сорока процентов имевшихся тогда карт мира. С высокой точностью была определена длина дуги в один градус на экваторе, что, в сопоставлении с данными лапландской экспедиции Мопертюи, разрешило спор о форме Земли в пользу сторонников сплюснутой с полюсов «арбузной» модели.

После девяти лет испытаний испанские офицеры решили возвращаться в Европу на разных судах, с тем чтобы в случае непредвиденных обстоятельств хотя бы одна копия записей о результатах экспедиции достигла места назначения. На французских фрегатах «Лиз» и «Делиберенс» 22 октября 1744 года они отправились в обратный путь.

Хорхе Хуан на «Лизе» достиг Бреста 31 октября 1745 года, откуда он направился в Париж для обсуждения результатов астрономических наблюдений. Здесь он познакомился со многими выдающимися учеными своего времени и был представлен к членству во Французской академии.

С Антонио де Уллоа судьба распорядилась по-другому. «Делиберенс» был захвачен англичанами, которые успели объявить войну французам, пока корабль с естествоиспытателем на борту пересекал Атлантику. Тайные записи Антонио де Уллоа выбросил за борт, но дневники геодезических и астрономических наблюдений сдал захватчикам, отметив при этом проявленный к этим записям неподдельный интерес. Некоторое время он провел в Портсмутской тюрьме, однако после ознакомления с дневниками Адмиралтейство объявило его свободным, причем герцог Бедфордский высказался в том смысле, что война не должна препятствовать развитию искусства и науки. Антонио де Уллоа были возвращены его дневники, а он сам представлен в члены Королевского общества. Следует отметить, что одним из результатов его минералогических наблюдений стало выделение платины как металла, отличного от золота и серебра.

Когда оба путешественника вернулись в Мадрид, Филиппа V уже не было на троне, а в Адмиралтействе и Министерстве иностранных дел их приняли безо всякого интереса. Хорхе Хуан намеревался вернуться на Мальту, когда к ним проявил внимание могущественный маркиз Ла Ансенада, отвечавший за военную и морскую политику Испании. Фердинанд VI присвоил обоим офицерам звание капитана фрегата и проявил интерес к секретной части их доклада, где описывалось политическое состояние заморских территорий. В 1748 году отчет о Перуанской экспедиции был издан в четырех томах тиражом 900 экземпляров (французское издание вышло в свет в 1751 году).

Жизнь Хорхе Хуана и по завершении Перуанской экспедиции была отмечена историческими событиями и полна самоотверженным служением отчизне. В 1749 году он посетил Англию с секретным поручением от Ла Ансенады, собирая информацию о достижениях местных корабелов. В том же году он вместе с Антонио де Уллоа опубликовал новый обширный трактат по результатам своих южноамериканских наблюдений. В 1752 году Хорхе Хуан стал директором Академии морской стражи и сосредоточился на преподавании и научных исследованиях. В Кадисе он основал астрономическую обсерваторию, оснащенную наиболее современным оборудованием. Много внимания Хорхе Хуан уделял конструированию легких и маневренных судов и лично руководил испытаниями их моделей. В 1754 году король назначил его в Палату мер и весов для контроля за качеством национальной валюты. Тогда же Хорхе Хуан основал Ученое собрание в Кадисе – прообраз будущей Академии наук. В ходе научных дискуссий с коллегами у него созрела мысль о написании «Морских испытаний», которые в двух томах были опубликованы в 1771 году. Этот трактат о конструкциях, механике и управляемости морских судов стал учебным пособием для многих поколений кораблестроителей.

В 1773 году приступ болезни свел Хорхе Хуана в могилу. Ученики вспоминали о нем как о философе-христианине. Когда Хорхе Хуану задавали научный вопрос, он воспринимал его как свою личную проблему. На просьбу высказать свое суждение по какому-либо предмету он откликался лишь после того, как собирал и анализировал всю имеющуюся информацию. Его мнение всегда было результатом зрелого размышления.

Почему они летят строем

В.ВЫШИНСКИЙ

Мой дед рассказывал, что солдаты во время долгих ночных переходов умудрялись спать на ходу в строю... Они делали это по очереди, опираясь на соседа. Может быть, именно поэтому птицы, совершая дальние перелеты, соблюдают строй, летя «пеленгом» или «клином»? Наверное, в этом есть резон, однако имеются и другие причины.

Известно, что птицы экономят энергию при полете строем. Действительно, данные телеметрии показывают, что в этом случае частота сердечных сокращений снижается по сравнению с одиночным полетом. Об этом же говорят и данные летных экспериментов при полете самолетов «пеленгом», когда, например, левое крыло последующего самолета находится в восходящем потоке правого концевого вихря предыдущего самолета. Так, при полете истребителей с интервалом около 90 м экономия топлива второго самолета из-за снижения сопротивления составляет 10–20% (в зависимости от высоты полета), что позволяет увеличивать дальность полета второго самолета на 180–230 км. Специалисты NASA работают над проектом, в котором автоматическая система управления, используя глобальную спутниковую позиционную систему, позволяющую определять положение самолета с точностью до 10 см, должна формировать устойчивый строй самолетов.

Для объяснения физики явления сначала отметим тот факт, что в ядре вихря давление падает и это падение давления может быть весьма существенным. Оно организует вращательное движение воздуха, являясь источником центростремительной силы. Смерч (торнадо) поднимает автомашины, срывает крыши с домов, а вихревой след самолета подобен двум горизонтальным торнадо. Такое образное сравнение придумали американцы, которым, в силу особенностей природных условий, часто приходится иметь дело со смерчами в обыденной жизни. Разрежение в ядре вихря можно «увидеть». Всплеск весла – и от кромок его лопасти отходит пара вихрей. В их центрах падение гидростатического давления приводит к образованию воронок на воде.

Теперь поговорим о вихревой системе самолета. При определенных условиях на большой высоте виден вихревой след самолета. Он может быть «живым», и вы видите, как он извивается. Это происходит тогда, когда частицы, «трассирующие» след, движутся вместе с вихрями. Бывает и так, что вихри, сформировав след, уходят вниз, а след долго сохраняется в атмосфере, «курчавясь» под действием атмосферной турбулентности. «Трассером» является водный конденсат продуктов сгорания двигателей. Вихри, имея разрежение в ядрах, засасывают в себя микрокапли этого конденсата, делая след видимым.

Вихри в следе за крылом имеют противоположные направления вращения: правый (если смотреть сзади на пролетевший самолет) вращается против часовой стрелки, левый – по часовой стрелке (рис.1). Вихри не могут просто так обрываться в атмосфере – они либо заканчиваются на твердой поверхности, либо уходят на бесконечность. Вокруг крыла организуется циркуляционное движение, такое, что в первом приближении его вихревую систему можно смоделировать П-образным вихрем (рис.2). Крыло как бы разрезает атмосферу, оставляя «надрез» в виде пары вихрей. При этом создается дополнительная сила сопротивления. Работа против этой силы равна кинетической энергии порожденного вихревого движения.

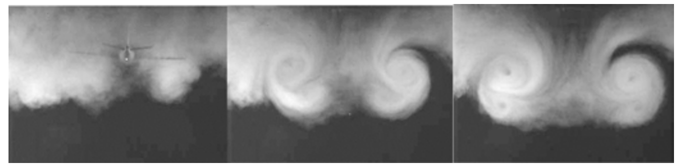


Рис.1. Вихревая пелена за крылом сворачивается в пару вихрей

Рис.2. Вихревая схема крыла в первом приближении

Есть различные экспериментальные устройства, снабженные измерительными приборами, которые позволяют измерять поля скоростей и давлений. Так, в аэродинамических и гидродинамических трубах движется поток, а исследуемая модель и измерительное оборудование неподвижны. В скоростных трассах, гидроканалах и катапультных установках модель движется в неподвижной среде, а измерители установлены на модели или в контрольном сечении (пример дымовой визуализации приведен на рисунке 1). Есть еще летный эксперимент, но он дорог и не всегда безопасен. Иногда удается провести исследования «даром» – надо только быть достаточно любознательным и иметь под рукой фотоаппарат, а интересное можно увидеть, например, даже в кино (рис.3; здесь отчетливо видно вращательное движение воздуха в следе за правым крылом). Опыты и наблюдения расскажут очень многое пытливому исследователю: качественно все процессы, связанные с образованием подъемной силы, можно увидеть вооруженным или невооруженным глазом.

Рис.3. Кадр из фильма «Крепкий орешек»

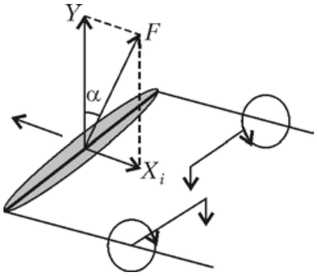


Рис.4. Схема возникновения индуктивного сопротивления

Итак, заменим вихревую систему самолета П-образным вихрем (такая упрощенная схематизация использовалась на заре авиации, используется и сейчас в учебных курсах на начальном этапе изучения аэродинамики самолета). Наличие свободных вихрей приводит к скосу потока в области крыла (в нашей схематизации – присоединенного вихря) и к повороту вектора аэродинамической силы $\vec{F}$ на некоторый угол α (рис.4). Теперь уже сила не перпендикулярна набегающему потоку, а имеет составляющую $\vec{X}_i$ против направления полета, которая называется индуктивным сопротивлением. Чем интенсивнее свободные вихри и чем меньше размах крыла, тем больше скос и выше индуктивное сопротивление.

Посмотрим теперь, что происходит, когда самолеты находятся в возмущенном потоке. Если самолеты расположены «пеленгом», то скос потока в области конца крыла последующего самолета будет меньше, а значит, индуктивное сопротивление на этой части крыла будет ниже.

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть случай полета «клином» – здесь выигрыш будет достигаться для двух последующих самолетов.

Разглядывая шариковую ручку

А.СТАСЕНКО

Однажды, внимательно слушая лекцию по оптике и разглядывая свою шариковую ручку с шестигранным прозрачным корпусом, Студент заметил, что стержень с пастой меняет свой видимый диаметр в зависимости от угла поворота. «Э, брат, – подумал Студент, – тут все дело в преломлении лучей». Но, как сказал Лектор, еще во втором веке Клавдий Птолемей описал явление преломления света в трактате «Оптика», а его последователи даже предложили связь между углами падения α и преломления β в виде $\frac{\alpha}{\beta} = n$, где n – постоянная величина, называемая коэффициентом преломления. Это верно, конечно, только для малых углов, а для любых углов неверно. Потому что правильный закон преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ лишь в семнадцатом веке изложил в своих лекциях (в Лейдене) Виллеброрд Снеллиус.

Но что же ручка? «Нельзя ли, – подумал Студент, – узнать коэффициент преломления пластмассы, из которой сделан ее корпус?» И приступил к делу.

Разобрав ручку, он прежде всего измерил геометрические размеры – радиус стержня r, внутренний радиус корпуса R, расстояние между внешними параллельными гранями b (рис.1), – благо под руками была тетрадь в клетку, правда не самый точный инструмент.

Были отмечены два интересных результата наблюдения: вдоль линии $A1O$ (перпендикулярно грани) стержень казался тоньше реального размера ($r' < r$), а вдоль линии BCO (луч проходит через диаметрально противоположные ребра) – казался самым толстым.

Начнем с первого случая. Так как наблюдение ведется с расстояния порядка 300 мм, то самый большой (внешний) поперечный размер ручки $b \sim 8$ мм мал по сравнению с этим расстоянием, не говоря уж о диаметрах внутренних цилиндров. Рассмотрим луч $532A$, который несет в глаз информацию о размере стержня. Углы α и β малы, так что здесь птолемеевцы могли бы порадоваться: $\frac{\alpha}{\beta} \approx n$. По этой же причине отрезок луча 23 почти параллелен отрезку 14 (ведь β еще меньше, чем малый угол α), так что длины отрезков 12 и 34 почти равны друг другу и кажущемуся радиусу r', а $\angle\gamma \approx \angle\varepsilon$. Отсюда следует

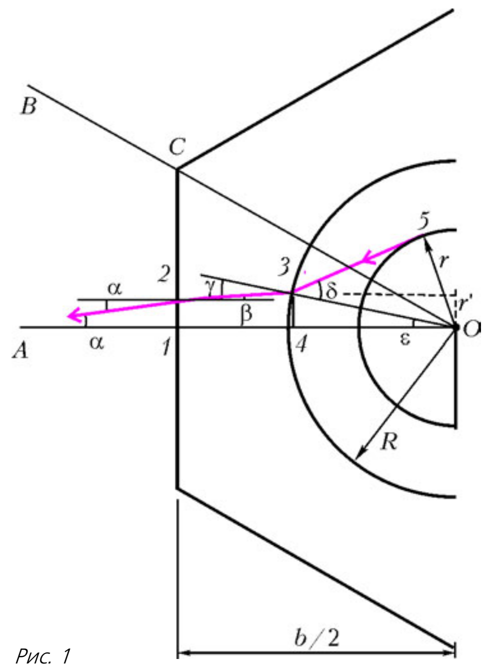


Рис. 1

$$\frac{r'}{AO} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \quad \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = n \approx \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \approx \frac{\sin\delta}{r'/R} \approx \frac{\sin\delta}{AO\cdot\alpha/R}.$$

Но треугольник $O53$ – прямоугольный, поскольку отрезок 35 – касательная к окружности стержня, поэтому $\sin\delta = \frac{r}{R}$. В результате получаем

$$n \approx \frac{r}{AO\cdot\alpha} = \frac{r}{AO\cdot r'/AO} = \frac{r}{r'}.$$

Измерив $2r \approx 2{,}5$ мм и $2r' \approx 1{,}5$ мм, находим $n \approx 5/3$.

«Э, – ведь это коэффициент преломления такого прекрасного стекла, как тяжелый флинт,» – подумал Студент и решил для уверенности рассмотреть второй случай – направ

(Продолжение см. на с. 34)

...Мы полагаем, что всякая частичка песка, влаги или дыма, будучи сначала притянута, а затем оттолкнута, уносит с собой дольку электрического огня, которая, однако, сохраняется в этих частицах, пока они не передадут ее куда-нибудь еще.

Бенджамин Франклин

Нельзя создать один вид электричества без того, чтобы создать другой.

Франц Эпинус

Сегодня я предъявляю Академии электрические весы ...Они измеряют с наивысшей точностью электрическое состояние и электрическую силу тела, как бы мала ни была степень его электризации.

Шарль Кулон

...Из этих двух законов следуют все предсказания электростатики. Но одно дело высказать эти вещи математически, и совсем другое – применять их с легкостью и с нужной долей остроумия.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам электростатика?

Этот раздел физики иногда определяют как «некоторый частный и наиболее простой случай взаимодействия зарядов». Слышали бы это ученые XVII–XIX веков, шедшие тернистым путем осмысления поразительных электростатических опытов! Нам ближе позиция Р.Фейнмана, призывавшего изучать электростатику потому, что она помогает ориентироваться и во многих иных вопросах физики.

Действительно, уравнения электростатики позволяют разобраться с задачами прохождения тепла, с вычислением натяжения мембран, с диффузией нейтронов в ядерном реакторе, с обтеканием жидкостью шара, с расчетом равномерного освещения... Еще в школе вы знакомитесь с объяснением опытов Резерфорда и моделью атома Бора, основанными на действии кулоновских сил. Позже узнаете, как работает атомно-силовой микроскоп, регистрирующий ничтожно малые электростатические силы. Возможно, когда-нибудь коснетесь проблемы самодействия, связанной с теорией удивительнейших крошечных объектов – космических струн. Вот куда может завести нас «простая» электростатика!

Не будем забывать и о множестве сугубо практических вопросов, к которым она имеет прямое отношение, – например, электростатическая защита в быту и на производстве или происходящие в атмосфере электрические явления.

Наверное, уже сказано достаточно хвалебных слов в адрес электростатики. Хотелось бы, чтобы желание их произнести появилось и у вас после изучения предлагаемого сегодня материала.

Вопросы и задачи

1. Можно ли наэлектризовать трением латунную палочку?

2. Прозрачные пленки для пищевых продуктов часто прилипают к стеклянным банкам или бутылкам. Однако если сосуды мокрые, этого не происходит. Почему?

3. Как с помощью свечи определить знаки зарядов пластин раздвижного конденсатора, соединенных с полюсами действующей электрофорной машины?

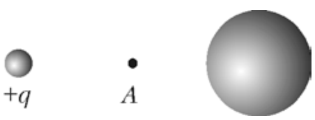
4. Изменится ли сила, действующая на разноименные заряды, если между ними поместить незаряженный металлический шарик?

5. Как объяснить, почему заряды каждого знака, индуцированные на нейтральном проводнике поднесенным к нему зарядом $+q$, всегда меньше q?

6. Зарядится ли нейтральный проводник при внесении его во внешнее электрическое поле?

7. Два одинаковых по величине заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. В каком случае напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между ними, больше: если эти заряды одноименные или разноименные?

8. Электрическое поле создается положительным зарядом $+q$. Как изменятся напряженность и потенциал электрического поля в точке A, если справа от нее поместить незаряженный проводящий шар, как изображено на рисунке?



9. Плоский конденсатор зарядили до разности потенциалов, немного не достигающей пробойного значения, и отсоединили от источника напряжения. Произойдет ли пробой, если пластины начать сближать?

10. Внутри металлической незаряженной сферы находится точечный заряд $+q$, смещенный от центра сферы. Как будет выглядеть картина силовых линий электрического поля внутри и вне сферы?

11. Человек, стоя на изолирующей подставке, прикасается к заряженному изолированному проводнику. Полностью ли разрядится при этом проводник?

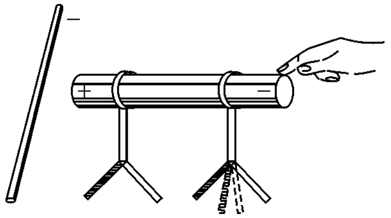
12. Внутри заземленной металлической сферы находится точечный заряд. Чему равна напряженность электрического поля вне сферы?

13. Почему стержень электроскопа заканчивается шариком, а не острием?

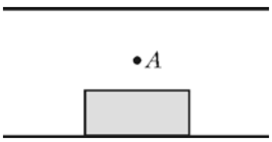
14. Два шара, большой и маленький, равномерно заряжены с одинаковой поверхностной плотностью. Будут ли одинаковы потенциалы этих шаров?

15. При поднесении к нейтральному металлическому телу отрицательно заряженной палочки произойдет перераспределение зарядов и листочки электроскопов разойдутся так, как показано на рисунке.

Опадут ли листочки правого электроскопа (изображено пунктиром), если коснуться правого торца тела рукой (т.е. заземлить тело)?



16. Пластины плоского конденсатора один раз раздвигают, оставляя их все время подключенными к источнику напряжения, другой раз — отключенными после первоначальной зарядки. В каком из этих двух случаев нужно совершить бóльшую работу по раздвиганию пластин? Как изменяется при этом энергия конденсатора?



17. Между пластинами плоского заряженного конденсатора помещают диэлектрическую пластинку, как изображено на рисунке. Изменится ли напряженность электрического поля в точке A после внесения пластинки?

18. Что произойдет с энергией плоского конденсатора, если: а) при неизменной разности потенциалов между его пластинами увеличить все его геометрические размеры в k раз; б) при тех же размерах увеличить заряд в n раз?

Микроопыт

У вас имеются три проводящих шара — один заряжен положительно, два других нейтральны. Как с помощью первого шара, не изменяя его заряда, наэлектризовать два других шара — один отрицательно, другой положительно?

Любопытно, что...

...английский ученый Симмер замечал характерное потрескивание и проскакивание маленьких искр всякий раз, когда снимал шелковые чулки. Наблюдения за столь необычными «приборами» навели Симмера на мысль о существовании двух видов электричества. Ученый также заряжал от чулок лейденскую банку, воспламенял их разрядами спирт и вообще развлекал своими опытами не только коллег, но даже принца Уэльского.

...электростатическую индукцию — наведение заряда без прямого соприкосновения тел, — впервые замеченную английским физиком Греем, позже смог правильно объяснить работавший в России немецкий ученый Эпинус, что позволило построить первый прототип плоского конденсатора.

...Ломоносов, отрицая электрическую теорию Франклина (как и многие европейские ученые), считал недопустимо опасной затеей установку громоотводов. А в 1784 году один француз чуть не был осужден за «притягивание» своим громоотводом молнии на головы сограждан. Спас же обвиняемого блестяще защищавший его на суде никому еще не известный тогда адвокат Робеспьер.

...то, что электрическое поле внутри равномерно заряженной сферы равно нулю, Франклин открыл за 18 лет, а Кавендиш — за 12 лет до появления закона Кулона, т.е. «закона обратных квадратов», из которого это явление вытекало как следствие.

...за 35 лет до опытов Кулона , в 1785 году, знаменитый философ Иммануил Кант высказал идею, связывающую «закон обратных квадратов» с трехмерностью нашего пространства. Но лишь в начале XX века физики вернулись к этой идее и подтвердили ее.

...распространенному представлению электростатического поля с помощью силовых линий, введенному Фарадеем, предшествовало пятью годами ранее представление этого поля с помощью эквипотенциальных поверхностей, сделанное Гауссом.

...для опытного доказательства закона сохранения заряда Фарадей экспериментировал с огромным металлическим шаром. В его сердцевину ученый помещал большие электростатические машины и разнообразное диковинное оборудование — в том числе кошачий мех, которым натирал стеклянные палочки, — отчего внутренность шара походила на лабораторию из современных фильма ужасов.

...исследования электрического поля Земли показывают, что она обладает отрицательным зарядом примерно в полмиллиона кулонов. Однако по мере подъема это поле быстро идет на убыль и уже на высоте 10 километров становится ничтожно слабым, поскольку на еще больших высотах Землю окружает слой положительно заряженных (ионизированных) молекул.

...при дроблении воды на капли происходит разделение электрических зарядов, причем крупные капли заряжаются положительно, а мелкие — отрицательно. Из-за более быстрого оседания крупных капель в воздухе создается заметное электрическое поле, обнаружить которое можно, например, в душевой кабине или около водопадов. А во время мойки танкеров мощными брандспойтами этот эффект не раз приводил к внушительным взрывам.

...рисунок к задаче 15 был приведен в книге «Эволюция физики» выдающихся ученых Эйнштейна и Инфельда. Как видите, даже авторитетным физикам оказалось не так-то легко анализировать простые электростатические опыты.

Что читать в «Кванте» об электростатике

(публикации последних лет)

1. «Проводящий шар в однородном поле» — 2001, №1, с.39;
2. «Электрическая машина в атмосфере» — 2001, №2, с.23;
3. «Франклин — изобретатель громоотвода» — 2001, №6, с.17;
4. «Если вращается елочный шарик» — 2002, №3, с.44;
5. «Электростатическое поле в веществе» — 2002, №5, с.40;
6. «Электричество» — 2003, Приложение №2, с.5—52;
7. «Потенциал электростатического поля» — 2003, №3, с.46;
8. «Нестандартные конденсаторы» — 2004, №3, с.45;
9. «Ковчег завета и электрическая машина» — 2004, №5, с.34;
10. «Физический калейдоскоп» — 2004, Приложение №6, с.58—69;
11. «Поляризованный шар — это просто» — 2005, №3, с.37.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

ление на ребро (рис.2). Тут, конечно, угол α мал по-прежнему, но о других углах этого не скажешь. И Студент решил честно (без всяких упрощающих предположений) выписать все, что ему известно, и учесть, что теперь кажущийся радиус r' почти вдвое больше, чем в первом случае.

Прежде всего, угол α известен из измерений: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r'}{BO}$. По-прежнему известен катет *35*: $35 = \sqrt{R^2 - r^2}$ (поскольку

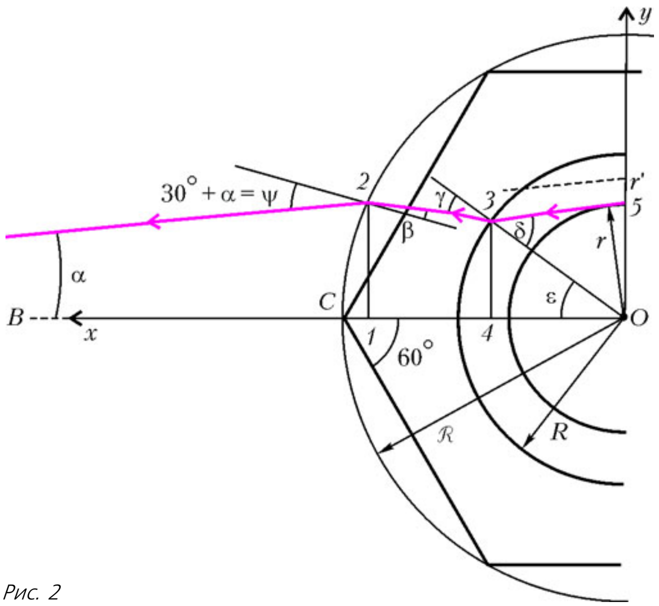


Рис. 2

он есть касательная к стержню в точке *5*) и угол δ: $\sin\delta = \frac{r}{R}$. Следовательно, для отрезка *12*, или ординаты y_2 точки *2*, получим $y_2 = (BO - x_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где x_1 – абсцисса точки *2*. С другой стороны, этот же отрезок есть и катет прямоугольного треугольника *C12*: $y_2 = (\mathcal{R} - x_1)\,\mathrm{tg}\,60^\circ$ ($\mathcal{R}$ – это радиус окружности, описанной вокруг шестигранного сечения). Значит, можно найти и абсциссу:

$$x_1 = \frac{\mathcal{R}\,\mathrm{tg}\,6^{\circ\circ} - r'}{\mathrm{tg}\,6^{\circ\circ} - \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\mathcal{R}\sqrt{3} - r'}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\alpha},$$

и окончательно ординату:

$$y_2 = \sqrt{3}\,\frac{r' - \mathcal{R}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Таким образом, координаты точки *2* (y_2 и $x_2 = x_1$) известны. Для этой точки запишем закон преломления Снеллиуса, связав между собой пока что неизвестные угол преломления β и коэффициент преломления n:

$$n = \frac{\sin\psi}{\sin\beta} = \frac{\sin(30^\circ + \alpha)}{\sin\beta}.$$

То же можно сделать и для точки *3*:

$$n = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{r}{R\sin\gamma},$$

но тут известен угол δ, что и учтено. Ордината этой точки есть $y_3 = R\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$, где угол ε пока что неизвестен.

Но как найти координаты точки *3*? Очень просто: написать уравнения прямой *23* и окружности радиусом R и учесть, что точка *3* принадлежит им обеим. Прямая *23* наклонена к оси x под углом $30^\circ - \beta$ и проходит через известную точку *2*. Значит, ее уравнение имеет вид

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \mathrm{tg}\,(30^\circ - \beta).$$

А уравнение окружности совсем простое с виду:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Решая эти два уравнения, выразим x_3 и y_3 через угол β. «Ох, – пробормотал Студент, – сплошная геометрия!»

«Но и геометрия – часть физики!» – заявил Сосед, давно наблюдавший за приятелем, и тут зазвонил звонок на перемену. Так что они решили найти n перед сном, а заодно построить зависимость наблюдаемого радиуса r' от угла поворота ручки – ведь дома у них был компьютер.

О роли парадоксов в развитии науки

Г.АЛАВИДЗЕ

Развитие науки на разных ее этапах определяется, вообще говоря, различными факторами. Стало уже общепринятым утверждение о том, что научные открытия происходят в результате усилий, направленных на решение задач, в основе которых лежат практические потребности человека. Нельзя упускать из виду и значение обычной человеческой любознательности и врожденного стремления к познанию нового, неизведанного. Но что дает первоначальный импульс к поиску? Представляется, что таким импульсом являются парадоксы, которые указывают на внутренние противоречия основ существующей теории.

Слово «парадокс» – греческого происхождения и означает нечто неожиданное, необычное. В современной науке под этим понятием подразумевают такой теоретический вывод относительно какого-то явления, который не согласуется с нашим представлением и знанием об этом явлении. После обнаружения парадокса (или парадоксов) начинается интенсивный научный поиск, который приводит к пересмотру основ существующей теории и созданию новой. Именно необходимость преодоления парадоксов была причиной замены механики Аристотеля на механику Ньютона, а впоследствии – создания теории относительности Эйнштейна.

История парадоксов указывает на то, что в науке ничто не принимается в качестве непререкаемой истины. Рано или поздно все подвергается «ревизии», и в этом смысле в науке нет непререкаемых авторитетов. Это можно назвать здоровым научным скепсисом.

Механика Аристотеля и первые механические парадоксы. Первую попытку научного объяснения механических явлений приписывают древнегреческому философу Аристотелю. Взгляды Аристотеля на механическое движение основываются не на экспериментах, а на общих философских принципах. Механическое движение он объясняет стремлением тел к своему естественному положению. Земля ему представлялась центром Вселенной, и поэтому все тела стремятся к этому центру. Движение без причины (т.е. силы), вызывающей это движение, он считал невозможным. При этом прямолинейное движение по инерции Аристотель объяснял действием вытесненного телом воздуха, который, устремляясь в образовавшуюся за движущимся телом пустоту, толкает его вперед.

Из общефилософских принципов Аристотеля следует отрицание пустоты. Абсолютное движение тела (т.е. его движение относительно абсолютного пространства), по мнению Аристотеля, возможно только в неоднородном пространстве. Пустота же, по его мнению, является однородным пространством, так как в пустоте одна точка ничем не отличается от любой другой. В своей «Физике» Аристотель приводит еще одно «опровержение» существования пустоты. А именно, проводя элементарные наблюдения над движущимися телами, он приходит к выводу, что скорость свободного падения тела пропорциональна массе тела и обратно пропорциональна плотности среды, в которой происходит движение, т.е. $v = k\frac{m}{\rho}$, где m – масса тела, ρ – плотность среды, k – коэффициент пропорциональности. Отсюда Аристотель делает вывод, что в пустоте ($\rho = 0$) скорость должна бы стать бесконечной, что невозможно. Поэтому и пустота невозможна.

Сегодня любой школьник знает, что оба приведенных утверждения – о невозможности механического движения в отсутствие силы и о бесконечной скорости тела в пустоте – не соответствуют действительности, но авторитет Аристотеля был настолько непререкаем, что его ошибочные представления о природе механического движения просуществовали почти две тысячи лет.

Первый, кто подверг сомнению некоторые утверждения Аристотеля, был византийский комментатор трудов Аристотеля Иоанн Филипон (VI в.). Вот довод, который он привел: если объяснение Аристотеля причин механического движения верно, то как объяснить вращение колеса вокруг своей оси? Где в этом случае та часть тела, которая испытывает давление вытесняемого воздуха? Парадокс Иоанна Филипона стал первой трещиной в механике Аристотеля.

Английскому философу и логику Уильяму Оккаму (XIV в.) принадлежит еще один аргумент: если бы объяснение Аристотеля причин механического движения было верным, тогда две стрелы, летящие в противоположных направлениях, оказавшись рядом, должны были бы затормозить друг друга и остановиться, так как поток воздуха, который является движущим для одной стрелы, явился бы тормозящим для другой.

Галилео Галилей доказал ошибочность и второго утверждения Аристотеля, касающегося свободного падения тел в безвоздушном пространстве. С помощью простого, но чрезвычайно остроумного рассуждения он показал, что в безвоздушном пространстве все тела, независимо от массы, должны падать с одной и той же (конечной) скоростью. Если предположить обратное, т.е. что тяжелые тела в пустоте падают быстрее легких, то тело, полученное соединением этих двух тел, должно (как более тяжелое) падать быстрее, чем каждое из составляющих тел в отдельности. Но, с другой стороны, то из двух тел, которое легче, будет тормозить прикрепленное к нему тяжелое тело, в результате чего их суммарная скорость окажется меньше скорости тяжелого тела. Полученное противоречие и доказывает, что скорость тела в пустоте не зависит от его массы.

Среди критиков чисто умозрительных тезисов Аристотеля можно назвать также известного ученого-энциклопедиста из Хорезма аль-Бируни (X–XI в.).

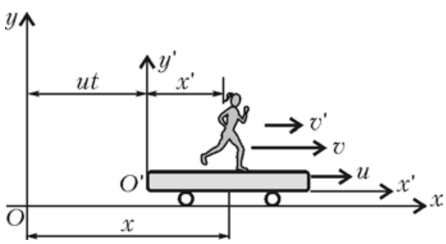
Как видим, пересмотр основ античной механики начался с обнаружения парадоксов, которые свидетельствовали о внутренней противоречивости существующей тогда науки. Вслед за этим началось интенсивное накопление новых экспериментальных фактов, их анализ и обобщение. Завершился этот процесс созданием механики Ньютона (XVII в.).

Кризис механики Ньютона. Примерно два с половиной века механика Ньютона считалась непререкаемой истиной. Но и здесь проявилась разрушительная сила парадоксов. И вот как это случилось.

К числу основополагающих принципов классической механики относится принцип относительности, согласно которому невозможно обнаружить прямолинейное и равномерное движение с помощью механических опытов. Это означает, в частности, что, если мы находимся внутри космического корабля, движущегося прямолинейно и равномерно, и при этом лишены возможности наблюдать за звездами, то мы никакими механическими опытами не сможем выяснить, движется корабль или нет, а если движется, то с какой скоростью. На математическом языке это означает, что законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$x' = x - ut\,, \quad v' = v - u\,,$$

где x и x' – координаты движущейся точки относительно неподвижной (OXY) и подвижной ($O'X'Y'$) систем координат, u – скорость подвижной системы координат, v и v' – скорости тела относительно неподвижной и подвижной систем координат соответственно (см. рисунок). Сказанное



означает, что невозможно доказать существование движения относительно абсолютного пространства, а следовательно, вопреки здравому смыслу, и существование этого пространства подвергается сомнению.

Надежда на то, что существование абсолютного пространства и движения относительно этого пространства будет все-таки доказано, появилась одновременно с созданием электромагнитной теории. Оказалось, что уравнения электромагнитного поля, которые были найдены в шестидесятых годах XIX века английским ученым Дж.Максвеллом, не инвариантны относительно преобразований Галилея: они видоизменяются при переходе к новой инерциальной системе координат. Следовательно, электромагнитные процессы в движущихся и неподвижных системах должны протекать по-разному. Появилась надежда, что с помощью электромагнитных опытов удастся обнаружить движение относительно абсолютного пространства. Были проведены опыты (Майкельсон и Морли), во время которых луч света пускали одновременно в двух направлениях: по направлению движения Земли и перпендикулярно этому движению. Лучи отражались от зеркал, расположенных на одинаковых расстояниях от исходной точки. Казалось бы, в точке встречи отраженных лучей должна была наблюдаться интерференция, что свидетельствовало бы о движении Земли относительно абсолютного пространства . Опыты дали отрицательный результат – интерференции не получилось.

Тогда ученые поставили под сомнение сами уравнения Максвелла и начали «подправлять» эти уравнения, но каждый раз обнаруживались такие электромагнитные явления, которые противоречили «исправленным» уравнениям. Наконец, нидерландский ученый Х.Лоренц в конце XIX века нашел такие преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны. В использованных выше обозначениях эти преобразования имеют следующий вид:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,,$$

где c – скорость света в вакууме. Как видим, преобразованию подверглись не только координаты, но и время (сравните с преобразованиями Галилея).

Преобразования Лоренца «спасли» электромагнитную теорию Максвелла, но очень сложной оказалась физическая интерпретация этих преобразований. Кроме того, теперь нужно было спасать саму ньютонову механику, так как второй закон Ньютона не инвариантен относительно преобразований Лоренца. Таким образом, на исходе XIX века физика оказалась перед лицом глубокого кризиса, в преодолении которого особая заслуга принадлежит А.Эйнштейну. Именно он в 1905 году создал стройную теорию, известную под названием специальной теории относительности, которая примирила классическую механику с новой электромагнитной теорией. При этом механике Ньютона пришлось пойти на серьезные жертвы. Так, например, пришлось отказаться от известного закона сложения скоростей; масса тела оказалась зависящей от скорости; время, которое со времен Аристотеля считалось абсолютной величиной, также оказалось зависящим от скорости. К счастью, при малых скоростях (при $u/c \ll 1$) вычисления, проведенные с помощью законов Ньютона, дают хорошие результаты. Расхождение результатов становится заметным лишь в том случае, когда скорость материальной точки становится соизмеримой со скоростью электромагнитной волны в вакууме (300000 км/с). Но такие огромные скорости пока встречаются только в атомной физике при исследовании движения элементарных частиц.

Однако триумф новой теории оказался недолговечным. Как специальная, так и общая теория относительности в последнее время подвергаются все более острой критике, физики обнаруживают в них внутренние противоречия. Идет интенсивный поиск новой, более общей и универсальной теории.

Вечные, или непознаваемые парадоксы. Рассмотренные парадоксы касались такого простейшего вида движения, каким является механическое движение. Достижения классической механики на определенном этапе породили иллюзию, что все существующие в мире явления можно свести к механическому движению и, следовательно, любое явление природы поддается изучению методами механики. В истории науки это направление получило название «механический детерминизм». Известно, например, высказывание Лапласа о том, что он может рассчитать все явления во Вселенной, если ему дадут начальные координаты и скорости всех частиц, из которых состоит Вселенная. Уверенность Лапласа во всесилии механики была такой непоколебимой, что на вопрос Наполеона, почему в его труде не нашлось места для Бога, Лаплас ответил, что ему не понадобилась гипотеза о существовании Бога.

Дальнейшее развитие науки доказало безосновательность такой самоуверенности. Более того, оказалось, что существуют такие сферы познания, которые не поддаются изучению не только методами механики, но и вообще не подвластны традиционным научным методам. Например, искусство, поэзия, некоторые явления человеческой психики и др. Более того, существуют, по-видимому, и вовсе непознаваемые явления. К ним, возможно, относится тайна происхождения Вселенной и ее эволюции. То же самое можно сказать о происхождении жизни. Приведем связанные с этим некоторые научные факты.

В 1922 году петроградский физик А.Фридман опубликовал статью под названием «О кривизне пространства». Выводы, к которым пришел автор статьи, были настолько неожиданными, что в них усомнился даже Эйнштейн. На основании анализа уравнений общей теории относительности Эйнштейна Фридман пришел к выводу, что метрика пространства – времени, т.е. геометрия Вселенной, не является постоянной. Эйнштейн, как и другие физики его поколения, был уверен в статичности Вселенной, поэтому он «подправил» свои уравнения таким образом, чтобы исключить возможность нестационарного решения. Впоследствии Эйнштейн признал, что это было его самой серьезной ошибкой.

По прошествии семи лет после публикации вышеупомянутой работы Фридмана справедливость его выводов подтвердил американский физик Эдвин Хаббл, который обнаружил центробежное движение галактик. Это открытие послужило основой известной гипотезы о происхождении Вселенной, согласно которой Вселенная, в том виде, в котором она существует сегодня, возникла в результате взрыва материи неимоверно высокой плотности. С момента взрыва и по сей день Вселенная расширяется, причем ее будущее зависит от средней плотности материи во Вселенной. Если эта плотность превышает некоторое критическое значение ρ_0 ($\rho > \rho_0$), то расширение Вселенной должно постепенно замедляться и со временем смениться обратным процессом, т.е. сжатием (так называемая замкнутая модель); если же $\rho < \rho_0$, то процесс расширения Вселенной необратим (открытая модель).

Чрезвычайно интересный результат по измерению средней плотности материи во Вселенной был получен в 2000 году во время международного эксперимента, целью которого было измерение угловых флуктуации температуры реликтового излучения Вселенной. По результатам измерения был сделан вывод, что суммарная плотность материи во Вселенной, с учетом как обычной (видимой) части Вселенной, так и невидимой (темной) материи, а также вакуума, близка к критической. Если эти измерения верны, то предсказать, какая из двух моделей Вселенной реализуется в будущем, в принципе невозможно.

Такой же глубокой тайной окутан феномен происхождения жизни. До сих пор не нашла убедительного подтверждения ни одна из научных гипотез, объясняющих эту загадку: практически равна нулю как вероятность привнесения на землю «субстанции жизни» из космоса в какой бы то ни было форме, так и вероятность самозарождения жизни на земле в результате «счастливой» комбинации химических элементов.

Возможно, как в случае с происхождением жизни, так и в случае происхождения Вселенной и ее эволюции мы имеем дело с непознаваемыми, или вечными парадоксами. Но новое знание всегда возникает в процессе преодоления парадоксов, наличие которых свидетельствует либо о внутренней логической противоречивости существующей теории, либо о том, что появились экспериментальные факты, которые не могут быть объяснены в рамках этой теории. Парадоксы дают мощный импульс, ускоряющий процесс познания.

Эксперименты с мыльной пленкой

С.ВАРЛАМОВ

Различные поверхностно-активные вещества (ПАВ) настолько часто встречаются в нашей жизни, что мы без них буквально не можем вздохнуть. Так, обладая способностью адсорбироваться на поверхности жидкости, скажем воды, они уменьшают ее коэффициент поверхностного натяжения. Известно, например, что коэффициент поверхностного натяжения чистой воды при комнатной температуре равен примерно 70 мН/м. Соответствующий коэффициент для мыльного раствора зависит, естественно, от сорта мыла, но он всегда меньше, чем для чистой воды. В справочниках приводится примерно вдвое меньшая величина: 35 мН/м. Измененные свойства поверхности жидкости проявляются весьма своеобразно. Предлагаем несколько интересных экспериментов с мыльными пленками.

Для первого эксперимента возьмем тонкую нить длиной около 30 см, сделаем из нее кольцо, смажем нить вазелином и положим на поверхность чистой (желательно дистиллированной) воды, налитой в тарелку (тарелка тоже должна быть тщательно вымыта). Нить примет некую «неправильную» форму, т.е. ляжет на поверхности воды так, как ей «будет удобно». Теперь кончиком карандаша, смоченным в мыльном растворе, быстро прикоснемся к поверхности воды внутри нитяной фигуры. Нитка «оживет» и слегка изменит свою форму, приблизив ее к окружности. Еще двумя-тремя прикосновениями добьемся того, что нитяное кольцо станет (почти) окружностью, внутри которой – мыльная пленка.

Поэкспериментируем немного с этой пленкой. Сначала убедимся в том, что площадь мыльной пленки ограничена. Для этого чистой, вымытой в дистиллированной воде стальной ложкой зачерпнем немного воды внутри кольца и выльем эту воду в заранее приготовленный чистый стаканчик. Обратите внимание на то, что площадь поверхности воды, ограниченная нитяным кольцом, уменьшилась! Если удалить всю мыльную пленку (ложкой это сделать затруднительно, но можно воспользоваться резиновой грушей), то нить принимает прежнюю, «удобную» для нее форму. Этот эксперимент показывает, что молекулы мыла не уходят внутрь воды, а все собираются на поверхности внутри нитяного кольца. Конечно, если карандаш, смоченный в мыльном растворе, подольше подержать в воде, то молекулы мыла, заполнив всю поверхность воды внутри кольца, попадут и в ее толщу. Мыльная же пленка, полученная в нашем эксперименте, по всей видимости, является *монослоем*, в котором молекулы мыла одна к одной располагаются на поверхности воды одним слоем.

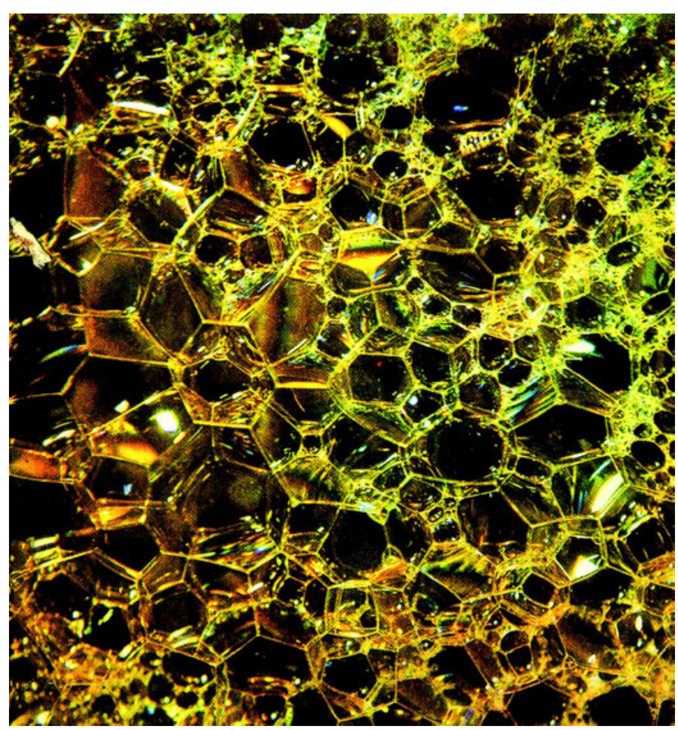
Возвратим воду из стаканчика снова внутрь нитяного кольца. Нить опять «оживет» и, как и прежде, примет форму, близкую к окружности. Отсюда следует, что за время своего отсутствия пленка не изменила своей площади, просто она частично находилась на другой поверхности – в стакане.

Любая система молекул, в том числе и система, содержащая молекулы воды и молекулы мыла, стремится занять положение, в котором ее суммарная потенциальная энергия была бы минимальной. Все молекулы конденсированных тел находятся в глубоких энергетических потенциальных ямах, созданных молекулами-соседками. Из того факта, что молекулы мыла «с удовольствием» занимают места на поверхности воды, следует, что потенциальная энергия этой системы молекул именно в таком случае принимает минимальное значение. И это «стремление» системы обеспечивается хаотическим тепловым движением, при котором молекулы могут преодолевать потенциальные барьеры, отделяющие одно положение, соответствующее минимуму энергии, от другого.

Заметим, что молекулы жирных кислот (мыла) по размеру значительно больше молекул воды и, кроме того, вытянуты. Разные концы одной молекулы мыла называют гидрофильным и гидрофобным. При попадании на поверхность воды молекулы мыла выстраиваются гидрофобными концами наружу (к воздуху), а гидрофильными – внутрь воды.

Выясним, как будет вести себя мыльная пленка, если нити не будет. Для этого сделаем пленку «видимой» – на поверхность чистой воды насыпем крупинки какого-нибудь порошка (талька, например). Вновь прикоснемся к поверхности воды кончиком карандаша, смоченного мыльным раствором. Понятно, что образующаяся на поверхности воды пленка мыла имеет возможность увеличивать свои размеры по всем направлениям. В этом случае капелька мыльного раствора остается в центре растущего по всем направлениям пятна.

Во втором эксперименте можно изучить движение кораблика с «мыльным» двигателем (явление движения такого кораблика описано в самых разных книгах). Возьмите совсем небольшой кусочек тонкой полиэтиленовой пленки, например размером 1×1 см. Если вы взяли цветную пленку, то следить за ее движением будет гораздо легче, чем в том случае когда пленка прозрачна. На «борт» кораблика поместите капельку шампуня и опустите кораблик на поверхность чистой воды, налитой в ванну. Вы увидите, что кораблик придет в движение, причем с весьма заметной скоростью – до 50 см/с (интересно, что скорость корабля существенно



зависит от температуры воды). А полоска чистой воды за корабликом будет иметь среднюю ширину в несколько раз большую, чем ширина полосы контакта шампуня с водой (оказывается, скорость кораблика и указанное отношение ширин связаны друг с другом).

Что заставляет такой кораблик двигаться? Какую роль здесь играет мыльная пленка? Что изменится, если вдруг пропадет вязкость воды?

Может быть, вам уже встречалось, например, такое «объяснение»: «С одной стороны кораблика, там где вода чистая, на кораблик действует бóльшая сила поверхностного натяжения, а с той стороны, где на поверхности воды есть мыльная пленка, сила поверхностного натяжения меньше. Вот эта разность сил и обеспечивает движение кораблика. Вязкое трение корабля о воду тормозит его движение, поэтому и устанавливается конечная скорость. Если вязкость воды уменьшится, то кораблик будет двигаться быстрее».

Так вот, это «объяснение» совершенно неверное! Представим себе мыльное пятно толщиной в одну молекулу на поверхности воды. Само по себе это пятно не движется. Поместим чистый кусочек полиэтиленовой пленки на край мыльного пятна так, чтобы по одну сторону полиэтилена находилась мыльная пленка, а по другую сторону – чистая вода (т.е. точно так же, как и в «объяснении»). Но пленка без полиэтилена не двигалась, так почему же теперь она придет в движение? А если все-таки придет в движение вместе с корабликом, то в нашем распоряжении окажется вечный двигатель – ничего не меняется, размеры мыльной пленки сохраняются, а кораблик плывет себе, преодолевая трение о воду!

В этом (неправильном) рассуждении считается, что при наличии мыльной пленки на поверхности воды поверхностное натяжение *меньше* поверхностного натяжения чистой жидкости. Это является заблуждением. Поверхностное натяжение мыльного раствора меньше, чем соответствующая величина для чистой воды, только до тех пор, пока при увеличении поверхности она покрывается пленкой из мыльных молекул. Как только в воде под поверхностью (т.е. в объеме) закончатся «свободные» молекулы мыла, для дальнейшего увеличения поверхности нам потребуется увеличивать площадь поверхности чистой воды. Следовательно, мономолекулярная пленка мыльных молекул на поверхности воды имеет два коэффициента поверхностного натяжения: при сокращении поверхности такой пленки поверхностное натяжение такое, как у мыльного раствора, а при увеличении поверхности такой пленки коэффициент поверхностного натяжения становится равным соответствующему коэффициенту для чистой воды.

Заметим, что плывущий кораблик непрерывно расходует «топливо». Молекулы мыла переходят с «палубы» кораблика на поверхность воды, и площадь мыльной пленки увеличивается. Пленка растет как раз на границе «палубы» кораблика и разбегается по поверхности воды. Наличие препятствия (кораблика) означает для данного случая, что пленка может, скажем так, «свободно» увеличивать свой размер только в одном направлении. Пленка, увеличивающая свою поверхность, движется от корабля в одном направлении, а затем по мере удаления от корабля приобретает возможность расти и в стороны.

Далее, если бы вода не обладала вязкостью, то пленка не увлекала бы ее в своем движении, т.е. воде не передавался бы импульс. В этом случае, учитывая, что масса самой мыльной пленки (слой толщиной в одну молекулу) мала по сравнению с массой кораблика, мы вообще не заметили бы никакого его движения. На самом же деле именно наличие вязкости обусловливает передачу воде импульса в направлении движения пленки. Если рассматривать участок воды под пленкой, саму пленку и кораблик как систему тел, то можно сказать, что сумма сил, действующих на систему, равна нулю. Поэтому должен сохраняться суммарный импульс этой системы. Вода под пленкой приходит в движение в том направлении, куда растет пленка, следовательно, кораблик будет двигаться в противоположном направлении. Днище кораблика испытывает сопротивление движению из-за вязкого трения. Таким образом, вязкое трение воды и обеспечивает возможность движения кораблика, и тормозит это движение. Как только запас топлива закончится, сразу же прекратится действие «реактивной силы», и кораблик вскоре остановится, так как трение днища о воду затормозит его движение.

Итак, мы качественно описали механизм действия мыльного двигателя. Заинтересовавшимся этим экспериментом предлагаем попробовать построить физическую модель явления и получить формулу для зависимости установившейся скорости движения кораблика от всех существенных в данной ситуации физических параметров.

В заключение – еще одни эксперимент, скорее всего мысленный. Представьте, что на поверхности большой капли чистой воды, плавающей в воздухе в кабине космической станции, находится смазанная вазелином тонкая нитка, образующая кольцо, причем меньшего радиуса, чем радиус капли. К большой капле медленно движется маленькая капля концентрированного мыльного раствора и прилипает к большой капле внутри нитяного кольца. Молекул мыла в капле мыльного раствора с избытком хватит, чтобы покрыть всю поверхность большой капли. Как будет со временем меняться форма большой капли?

Оказывается, мыльная пленка на сферической поверхности большой капли сравнительно быстро покроет участок, ограниченный нитью. Будем считать, что на этом участке пленка возникает мгновенно. Изогнутая поверхность воды создает внутри капли дополнительное, так называемое лапласовское, давление $p = 2\sigma/R$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения, R – радиус капли. Под частью поверхности капли, покрытой мыльной пленкой, это лапласовское давление меньше, поэтому жидкость внутри большой капли придет в движение и устремится туда, где давление меньше. Поверхность воды вместе с мыльной пленкой дополнительно изогнется, и лапласовское давление повысится. Со временем установится равновесное состояние, при котором радиусы кривизны поверхности для чистого участка капли и для участка, покрытого мыльной пленкой, будут отличаться так, как отличаются коэффициенты поверхностного натяжения. В нашем случае радиусы кривизны должны отличаться в два раза, поскольку для чистой воды $\sigma_в = 70$ мН/м, а для мыльного раствора $\sigma_м = 35$ мН/м.

Однако на этом изменение формы капли не прекратится. Поскольку молекул мыла в капле мыльного раствора с избытком хватит, чтобы покрыть всю поверхность большой капли, молекулы мыла, которые содержались в объеме капли из мыльного раствора, быстро заполнят поверхность внутри нитяного кольца, а затем постепенно, вследствие диффузии, проникнут сквозь слой воды и расположатся на остальной поверхности большой капли. Пока вся поверхность большой капли не покроется молекулами мыла, поверхностное натяжение участков, разделенных нитью, будет различным. В течение этого времени форма капли будет сохраняться. Как только вся поверхность капли покроется молекулами мыла, форма капли начнет постепенно (по мере поступления молекул мыла через толщу воды) изменяться, приближаясь к сферической. В конце концов «объединенная» капля вновь будет иметь ту же форму, какая у нее была до столкновения с каплей мыльного раствора.

Диэлектрики в электрическом поле

В.МОЖАЕВ

Пусть в пространстве имеется некоторое распределение зарядов. Если мы сохраним это распределение и заполним все пространство, где поле не равно нулю, диэлектриком, то напряженность электрического поля повсюду уменьшится в ε раз. Здесь ε – физическая характеристика диэлектрика, ее называют диэлектрической проницаемостью данного вещества. Это определение диэлектрической проницаемости среды не раскрывает механизма взаимодействия диэлектрика с внешним полем, но на школьном уровне этого вполне достаточно.

Типичным примером такой ситуации является заряженный конденсатор, например плоский, сферический или цилиндрический. Если мы сохраним распределение зарядов на его обкладках и полностью заполним его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то напряженность поля в любой точке внутри конденсатора уменьшится в ε раз. Но если поле внутри конденсатора уменьшилось, а заряды на обкладках сохранились, то это означает, что должны появиться дополнительные заряды, которые создают поле, направленное навстречу полю наших зарядов. Так оно и происходит – на поверхностях диэлектрика, примыкающих к обкладкам конденсатора, появляются поляризационные заряды, причем их знаки противоположны знакам зарядов на обкладках, и результирующее поле внутри конденсатора уже создается всеми зарядами, включая и поляризационные.

А вот если мы будем поддерживать постоянной разность потенциалов между пластинами конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком поле внутри него не изменится. Сохранение величины поля означает рост свободных зарядов на обкладках конденсатора, и понятно, что заряд конденсатора возрастет именно в ε раз. Причем произойдет это благодаря источнику тока, присоединенного к конденсатору.

Еще одним фактором, влияющим на поле в диэлектрике, является конфигурация той части пространства, которая заполнена диэлектриком. Мы ограничимся наиболее простой формой диэлектрика: тонкая пластина или сферический слой.

А теперь перейдем к разбору конкретных примеров.

Задача 1. *Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами частично заполнен диэлектриком, как это изображено на рисунке 1 для трех разных случаев. Определите напряженность электрического поля внутри диэлектрика, если заряд на обкладках конденсатора Q, площадь пластин S, диэлектрическая проницаемость среды* ε*. Размеры диэлектрика указаны на рисунке.*

Рассмотрим первый случай, когда конденсатор частично заполнен слоем диэлектрика толщиной h (см. рис.1,*а*). В отсутствие диэлектрика напряженность электрического поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \qquad (1)$$

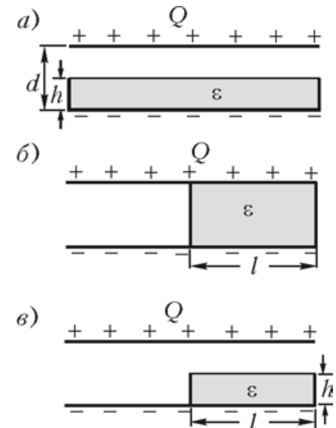


Рис. 1

При данном частичном заполнении пространства между обкладками диэлектриком мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединенных конденсаторов, один из которых воздушный емкостью

$$C_в = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h},$$

а другой – полностью заполненный диэлектриком, емкость которого

$$C_д = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h}.$$

На каждом из конденсаторов находится заряд Q, поэтому разность потенциалов на заполненной диэлектриком части конденсатора равна

$$U_д = \frac{Q}{C_д} = \frac{Qh}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_д = \frac{U_д}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \qquad (2)$$

Сравнивая полученное выражение с напряженностью в отсутствие диэлектрика (1), мы видим, что напряженность поля в диэлектрике уменьшилась в ε раз и это ослабление поля не зависит от толщины слоя диэлектрика. При таком способе заполнения происходит максимальное ослабление поля в диэлектрике.

Перейдем ко второму случаю (см. рис.1,*б*). Теперь мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух параллельно соединенных конденсаторов с емкостями

$$C_в = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}\left(\sqrt{S}-l\right)}{d} \text{ и } C_д = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} l}{d},$$

где $\sqrt{S}$ – линейный размер обкладок конденсатора. Общая емкость конденсатора составляет

$$C = C_в + C_д = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right).$$

Разность потенциалов между обкладками нашего конденсатора равна

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S\left(1+\frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right)},$$

а напряженность поля в диэлектрике –

$$E_д = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S\left(1+\frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right)}. \qquad (3)$$

Проанализируем полученное выражение на зависимость от l. При стремлении l к $\sqrt{S}$ поле в диэлектрике уменьшается и стремится к значению

$$E_д\left(\sqrt{S}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а при стремлении l к нулю поле растет и при $l = 0$ становится равным

$$E_д(0) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

При произвольном значении l поле в диэлектрике заключено в пределах

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \le E_д(l) \le \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

В третьем случае (см. рис.1,*в*) мы можем рассматривать наш конденсатор как систему трех конденсаторов – соответствующая эквивалентная схема изображена на рисунке 2. Емкость первого, воздушного, конденсатора равна

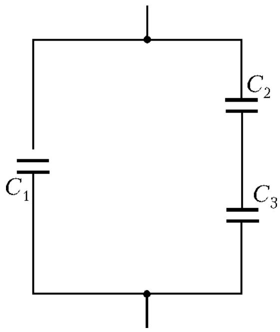


Рис. 2

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}\left(\sqrt{S} - l\right)}{d},$$

емкость второго, воздушного, конденсатора равна

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S} l}{d - h},$$

а емкость третьего конденсатора, заполненного диэлектриком, равна

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} l}{h}.$$

Общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов (второго и третьего) составляет

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} l}{h + \varepsilon(d - h)},$$

а общая емкость всех конденсаторов есть

$$C = C_1 + C_{23} = \varepsilon_0 \sqrt{S}\left(\frac{\sqrt{S} - l}{d} + \frac{\varepsilon l}{h + \varepsilon(d - h)}\right).$$

Разность потенциалов между обкладками нашего конденсатора равна

$$U = \frac{Q}{C},$$

заряд на последовательно соединенных конденсаторах равен

$$Q_{23} = UC_{23} = \frac{QC_{23}}{C},$$

разность потенциалов на третьем конденсаторе составляет

$$U_3 = \frac{Q_{23}}{C_3} = \frac{QC_{23}}{C_3 C},$$

а напряженность поля внутри диэлектрика есть

$$E_{др} = \frac{U_3}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S\left(\frac{h}{d}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{S}}\right) + \varepsilon\left(1 - \frac{h}{d} + \frac{hl}{d\sqrt{S}}\right)\right)}.$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение при $l = \sqrt{S}$ переходит в выражение (2), а при $h = d$ – в выражение (3).

Следует отметить, что во втором и третьем случаях при сохранении заряда на обкладках конденсаторов происходит перераспределение этого заряда: поверхностная плотность зарядов на той части пластин, которые примыкают к диэлектрику, больше, чем на воздушной части пластин. Убедиться в этом мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

Задача 2. *Проводящая заряженная сфера радиусом r_1 окружена сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Радиус внешней поверхности диэлектрика равен r_2. Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на внешней поверхности диэлектрика, если на сфере находится свободный заряд Q.*

Можно сразу сказать, что напряженность поля внутри диэлектрика будет в ε раз меньше по сравнению с полем без диэлектрика. Действительно, заряд на сфере сохраняется, сохраняется и его равномерное распределение по сфере (в силу сферической симметрии). Но диэлектрик заполняет только часть пространства, поэтому наше утверждение требует доказательства.

Заполним все пространство вне сферы ($r_1 \le r \le \infty$) нашей диэлектрической средой. В этом случае напряженность электрического поля во всей этой области уменьшится в ε раз. Мысленно проведем сферу радиусом r_2 (рис.3). Пусть на поверхности сферы радиусом r_1 расположен свободный положительный заряд Q (черные крестики), тогда вблизи этой поверхности будет равномерно распределен связанный отрицательный заряд (красные черточки). Обозначим величину этого заряда через $q_{св}$. Вблизи сферической поверхности радиусом r_2 (с внутренней и внешней стороны) также будут расположены связанные заряды, равные по величине $q_{св}$ и противоположные по знаку. Связанные отрицательные заряды на сфере радиусом r_2 никакого влияния на поле в области $0 \le r \le r_2$ не оказывают – результирующее поле, которое они создают в любой точке этой области, равно нулю. Поэтому мы можем убрать диэлектрик из области $r_2 \le r \le \infty$, и ничего при этом не изменится в интересующей нас области.

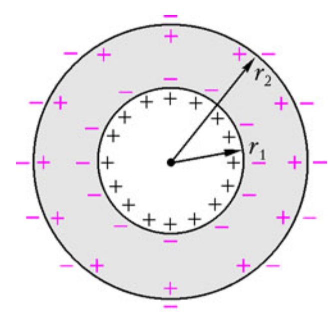


Рис. 3

Итак, напряженность электрического поля в области $r_1 \le r \le r_2$ в отсутствие диэлектрика равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а при наличии диэлектрика –

$$E_д(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

С другой стороны, это же поле равно сумме полей, создаваемых зарядами Q и $q_{св}$, где $q_{св}$ – это отрицательные заряды у поверхности сферы радиусом r_1:

$$E_д(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q_{св}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(Q - q_{св}).$$

Сравнивая два выражения для $E_д$, получим

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} = \frac{(Q - q_{св})}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Отсюда находим величину связанных зарядов:

$$q_{св} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q$$

и поверхностную плотность этих зарядов на сфере радиусом r_2:

$$\sigma_{св}(r_2) = \frac{q_{св}}{4\pi r_2^2} = \frac{(\varepsilon - 1)Q}{4\pi\varepsilon r_2^2}.$$

Задача 3. *Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S = 150$ см^2 и расстоянием между пластинами $d = 6$ мм подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 200$ В. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы в область между пластинами конденсатора вставить слю-*

дяную пластинку толщиной $h = 4$ мм? Горизонтальные размеры всех пластин одинаковы, а диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

Минимальную работу найдем по закону сохранения энергии.

Энергия и заряд конденсатора до введения пластинки равны соответственно

$$W_1 = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{2d} \text{ и } Q_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}.$$

Емкость конденсатора после введения пластинки стала (см. задачу 1)

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{h + \varepsilon(d-h)}.$$

Энергия конденсатора и заряд на нем после введения пластинки стали

$$W_2 = \frac{C_2\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2\left(h+\varepsilon(d-h)\right)} \text{ и } Q_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}}{h+\varepsilon(d-h)}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 h(\varepsilon-1)}{2d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)}.$$

Работа батареи по переносу заряда $Q_2 - Q_1$ составляет

$$A_б = \mathcal{E}(Q_2 - Q_1) = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 h(\varepsilon-1)}{d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)}.$$

По закону сохранения энергии работа внешних сил равна

$$A = \Delta W - A_б = -\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 h(\varepsilon-1)}{2d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)} = -5{,}9\cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Задача 4. *В плоский воздушный конденсатор вставлена стеклянная пластина с $\varepsilon = 9$ так, что остался воздушный зазор толщиной $h = 1$ мм. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 1$ см. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U_0 = 100$ В. Чему будет равно напряжение на конденсаторе, если после отключения его от источника убрать стеклянную пластину?*

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь обкладок конденсатора. Емкость конденсатора со вставленной стеклянной пластиной равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: воздушного толщиной h и стеклянного толщиной $d-h$ и составляет

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d + h(\varepsilon-1)}.$$

Заряд, оставшийся на конденсаторе емкостью C после его отключения от источника напряжения, равен

$$Q = CU_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U_0}{d + h(\varepsilon-1)}.$$

После удаления стеклянной пластины заряд на обкладках конденсатора сохраняется, а емкость и напряжение изменяются. Новое напряжение составит

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{\varepsilon U_0}{1 + \dfrac{h}{d}(\varepsilon-1)} = 500 \text{ В}.$$

Задача 5. *Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами – расстояние между пластинами d и площадь пластин S – заряжен до разности потенциалов U и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор до его середины вдвигают широкую пластину из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Толщина пластины d. Определите силу, с которой пластина втягивается в конденсатор в данном положении.*

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

После отключения источника напряжения на конденсаторе остается заряд

$$Q_0 = C_0 U = \frac{\varepsilon_0 S U}{d}.$$

При вставленной пластине одна половина конденсатора заполнена диэлектриком, а другая остается пустой. Емкость такого конденсатора составляет

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon+1)}{2d},$$

а его энергия равна

$$W_1 = \frac{Q_0^2}{2C_1} = \frac{Q_0^2 d}{\varepsilon_0 S(\varepsilon+1)}.$$

Пусть на диэлектрическую пластину в этом положении действует со стороны электрического поля сила F, которая приложена в месте максимальной неоднородности поля и направлена в сторону незаполненной части конденсатора (рис.4). Приложим к диэлектрической пластине внешнюю силу, равную F и направленную в противоположную сторону. Выдвинем пластину на небольшую величину dx, совершив при этом работу

$$dA = F dx.$$

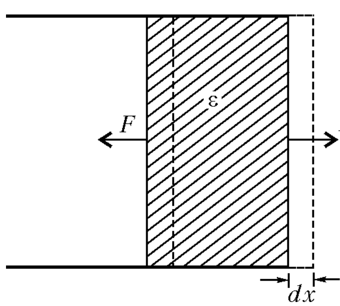


Рис. 4

Очевидно, что эта работа пойдет на изменение энергии конденсатора. Найдем новую емкость и новую энергию конденсатора после перемещения диэлектрической пластины:

$$C_2 = C_1\left(1 + \frac{2(1-\varepsilon)dx}{(1+\varepsilon)\sqrt{S}}\right) \text{ и } W_2 = \frac{Q_0^2}{2C_2}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$dW = W_2 - W_1 = \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{Q_0^2}{2}\frac{(C_1 - C_2)}{C_1 C_2}.$$

Поскольку емкость C_2 мало отличается от C_1, можно положить, что

$$C_1 C_2 \approx C_1^2.$$

В этом предположении

$$dW = \frac{2(\varepsilon-1)dQ_0^2 dx}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)^2 S^{3/2}}.$$

Приравнивая работу dA к изменению энергии dW, найдем силу, с которой пластина втягивается в конденсатор:

$$F = \frac{2(\varepsilon-1)dQ_0^2}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)^2 S^{3/2}}.$$

После подстановки в это соотношение выражения для заряда Q_0, окончательно получим

$$F = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{S}U^2}{(\varepsilon+1)^2 d}.$$

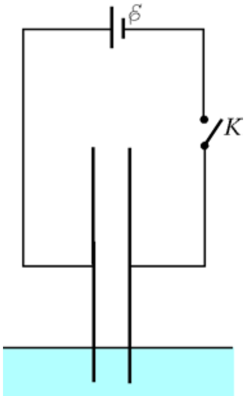


Рис. 5

Задача 6. *Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками d частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью* ε *и плотностью* ρ *(рис.5). Через разомкнутый ключ K к пластинам конденсатора подведена батарея с ЭДС* $\mathscr{E}$. *Внутреннее сопротивление батареи мало. Пренебрегая вязкостью жидкости и капиллярными явлениями, определите максимальную высоту подъема жидкости в конденсаторе после замыкания ключа. На какой высоте установится жидкость при наличии тепловых потерь?*

Поскольку омическим сопротивлением в электрической цепи мы пренебрегаем, сразу после замыкания ключа и в последующее время напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи $\mathscr{E}$. Пусть после замыкания ключа жидкий диэлектрик поднимется на максимальную высоту h. Очевидно, что в этом случае работа, совершенная батареей, пойдет на изменение энергии конденсатора и на изменение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести (изменение кинетической энергии жидкости равно нулю).

Обозначим начальную емкость пустого (воздушного) конденсатора через C_0. Тогда емкость конденсатора в момент подъема жидкости на высоту h равна

$$C_h = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah}{d},$$

где a – ширина пластин конденсатора. Изменение энергии конденсатора после подъема жидкости равно

$$\Delta W_к = (C_h - C_0)\frac{\mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)ah\mathscr{E}^2}{2d}.$$

Изменение потенциальной энергии поднятой жидкости составляет

$$\Delta W_ж = \frac{\rho g a h^2 d}{2}.$$

Работа, совершенная батареей, равна

$$\Delta A = (C_h - C_0)\mathscr{E}^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)ah\mathscr{E}^2}{d}.$$

Записав закон сохранения энергии, получим уравнение для определения h:

$$\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)ah\mathscr{E}^2}{d} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)ah\mathscr{E}^2}{2d} + \frac{\rho g a h^2 d}{2}.$$

Данное квадратное уравнение имеет два решения:

$$h_1 = 0 \quad и \quad h_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2}{\rho g d^2}.$$

Первое решение ($h_1 = 0$) соответствует начальному положению уровня жидкости, второе решение (h_2) отвечает максимальному подъему жидкости через некоторое время после замыкания ключа. А то положение уровня жидкости, которое установится после замыкания ключа при наличии тепловых потерь, должно соответствовать минимуму полной энергии нашей системы.

Обозначим установившуюся высоту подъема через z. Емкость конденсатора в этом случае равна

$$C_z = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)az}{d}.$$

Заряд на конденсаторе составляет

$$Q_z = C_z\mathscr{E} = \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)az}{d}\right)\mathscr{E}.$$

Энергия, запасенная в батарее, равна

$$W_б = W_0 - Q_z\mathscr{E} = W_0 - \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)az}{d}\right)\mathscr{E}^2,$$

где W_0 – начальная (до замыкания ключа) энергия в батарее. Энергия конденсатора составляет

$$W_к = \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)az}{d}\right)\frac{\mathscr{E}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости есть

$$W_ж = \frac{\rho g a d z^2}{2}.$$

Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_б + W_к + W_ж,$$

или

$$W = W_0 - \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)az}{d}\right)\frac{\mathscr{E}^2}{2} + \frac{\rho g a d z^2}{2}.$$

Запишем условие минимума энергии и после дифференцирования получим уравнение

$$\rho g a d z - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)a\mathscr{E}^2}{2d} = 0.$$

Отсюда найдем

$$z = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2}{2\rho g d^2}.$$

Как видно из полученного выражения, высота, соответствующая устойчивому положению уровня жидкости, в два раза меньше максимальной высоты подъема. При отсутствии затухания жидкость колебалась бы около положения $h = z$ с амплитудой, равной z. При малых потерях энергии колебания будут затухать, и уровень жидкости установится на высоте z.

Упражнения

1. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 10$ мм частично заполнен плоскопараллельным слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$. Толщина слоя диэлектрика $h = 6$ мм. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 100$ В. Чему равна напряженность электрического поля внутри диэлектрика?

2. Плоский конденсатор, полностью заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, заряжают от батареи с ЭДС $\mathscr{E}$ и отключают. Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на границе проводник – диэлектрик, если расстояние между пластинами конденсатора d.

3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подключен к батарее, ЭДС которой $\mathscr{E}$. Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние отодвинули пластину, если при этом была совершена работа A?

4. Диэлектрическая пластина толщиной l_1 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора так, что между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_2. Определите силу притяжения между обкладками, если разность потенциалов между ними U, а площадь пластины и обкладок S. Как изменится выражение для силы в предельном случае при $l_2 \to 0$?

Точка вне окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН,
В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Опорные задачи

Задача 1. *Докажите, что угол между двумя секущими измеряется полуразностью дуг, на которые он опирается (рис.1).*

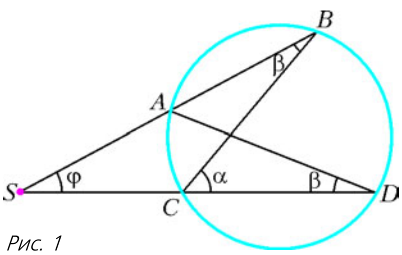


Рис. 1

Задача 2. *В обозначениях рисунка 1 докажите, что*

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD .$$

Задача 3. *Докажите, что (рис.2)*

$$ST^2 = SA \cdot SB .$$

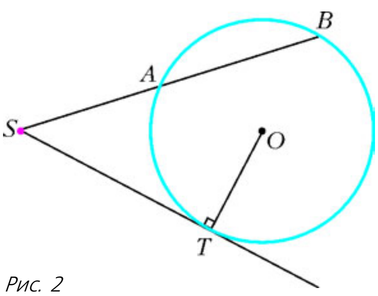


Рис. 2

Задача 4. *Пусть AB – хорда, BC – касательная к окружности в точке B (рис.3). Докажите, что угол B измеряется половиной дуги окружности, расположенной внутри этого угла.*

Отметим один важный частный случай, когда секущие SB и SD опираются на диаметр BD окружности (рис.4).

Задача 5. *Докажите, что*

$$\frac{AC}{BD} = \cos\gamma .$$

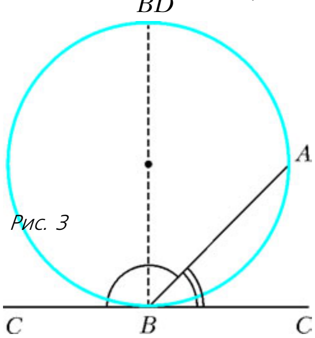


Рис. 3

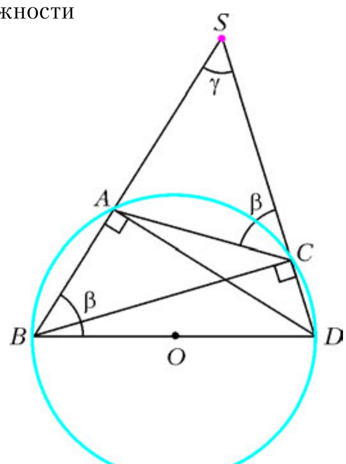


Рис. 4

Решение. Заметим, что BC и DA – высоты треугольника BSD. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{SC}{SB} = \frac{SA}{SD} .$$

Но треугольники ASC и BSD подобны, так как, например, $\angle SCA = 180° - \angle ACD = 180° - (180° - \beta) = \beta$. Поэтому

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AC}{BD} = \cos\gamma .$$

Задача 6. *В четырехугольнике ABCD, вписанном в окружность, диагональ AC является диаметром окружности. Докажите, что* $\frac{BD}{AC} = \cos\alpha$, *где* α *– угол между прямыми BC и AD, равный углу между прямыми AB и CD.*

Решение. Пусть M – точка пересечения прямых AB и CD, а N – точка пересечения прямых BC и AD (рис.5). Так как AC – диаметр, то MD и NB – высоты треугольника AMN, а C – ортоцентр этого треугольника. При этом $\angle NAB = 90° - \alpha$ и $BD = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha$ по теореме синусов. А так как $AC = 2R$, то

$$\frac{BD}{AC} = \cos\alpha .$$

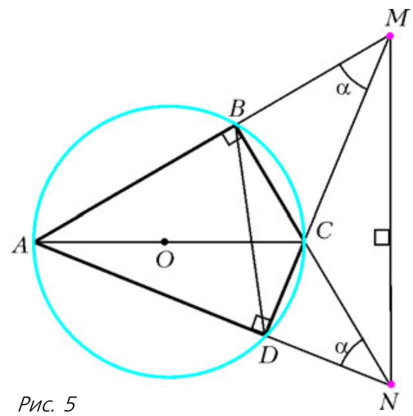


Рис. 5

Рассмотрим еще одну типичную конфигурацию.

Задача 7. *Пусть SP и SQ – касательные к данной окружности, секущая пересекает PQ в точке B, а окружность – в точках A и C (рис.6). Докажите, что*

$$\frac{SA}{SC} = \frac{BA}{BC} .$$

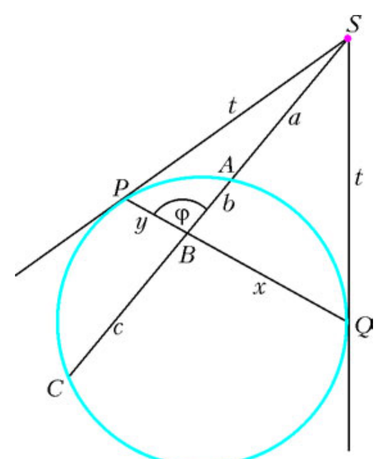


Рис. 6

Решение. Заметим сразу, что (обозначения ясны из рисунка 6) $xy = bc$ (свойство отрезков хорд), $t^2 = (a+b+c)a$ (свойство отрезков касательной и секущей).

Далее, треугольник PSQ – равнобедренный. По теореме косинусов для треугольников BSQ и BSP имеем

$$t^2 = (a+b)^2 + x^2 + 2x(a+b)\cos\varphi ,$$

$$t^2 = (a+b)^2 + y^2 - 2y(a+b)\cos\varphi .$$

Умножим первое равенство на y, второе – на x, а затем сложим. В результате получим

$$(x+y)t^2 = (a+b)^2(x+y) + xy(x+y) .$$

Отсюда

$$(a+b)^2 = t^2 - xy = (a+b+c)a - bc ,$$

и, наконец,

$$(a+b+c)b = ac .$$

Но это и значит, что $\frac{SA}{SC} = \frac{BA}{BC}$.

Замечание 1. Последнюю задачу можно было бы сформулировать так:

Докажите, что точки S и B делят отрезок AC в одном и том же отношении внешним и внутренним образом соответственно.

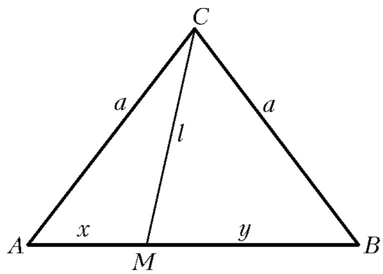


Рис. 7

Замечание 2. Решая задачу 7, мы вывели весьма полезное соотношение, справедливое для равнобедренных треугольников:

Если точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ACB (рис.7), в котором $CM = l$, $AM = x$, $MB = y$, $BC = a$, то

$$l^2 = a^2 - xy.$$

Задачи вступительных экзаменов

Представленные далее задачи взяты, в основном, из вариантов вступительных экзаменов разных лет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Задача 8. *Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P, причем AB : BC = 2 : 3. Найдите AP : PC.*

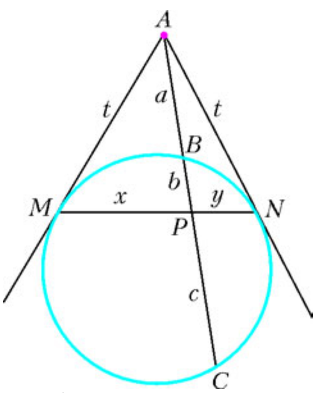


Рис. 8

Решение. Используем задачу 7 (рис.8). Здесь по условию $a:(b+c) = 2:3$. Требуется найти отношение $(a+b):c$. Так как $a = 2k$, $b + c = 3k$ при некотором $k > 0$ и $(a+b+c)b = ac$, то $(2k+3k)b = 2kc$, откуда $b:c = 2:5$. Значит, $b = 2m$, $c = 5m$ при $m > 0$. Итак, $b + c = 3k = 7m$, т.е. $k = \frac{7}{3}m$. Поэтому

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2k+2m}{5m} = \frac{4}{3}.$$

При решении целого ряда задач бывает полезным провести вспомогательную окружность и уже к ней применять результаты опорных задач.

Задача 9. *В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.*

Решение. Из точек P и Q отрезок AC виден под одним и тем же углом в $90°$, так как $AP \perp BC$ и $CQ \perp AB$ по условию (рис.9). Поэтому четырехугольник $AQPC$ вписанный, секущие BA и BC опираются на диаметр AC, и можно использовать опорные свойства: наличие двух пар подобных треугольников, а именно

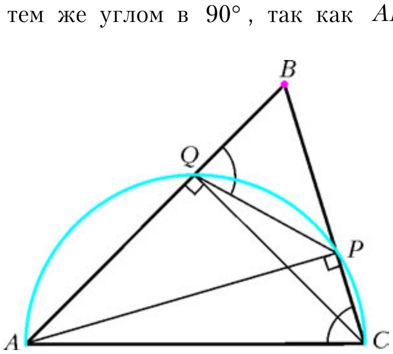


Рис. 9

$$\Delta BPQ \sim \Delta BAC \text{ и}$$

$$\Delta BPA \sim \Delta BQC,$$

и соотношение

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{BA} = \cos\angle B.$$

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{PQ}{AC} = \sqrt{\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}} = \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{AC} = \cos\angle B,$$

откуда

$$AC = 6\sqrt{2} \text{ и } \sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Искомый радиус $R = R_{ABC}$ найдем из теоремы синусов:

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{9}{2}.$$

Задача 10. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, точка O – центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что величина угла ABC равна β, а площадь четырехугольника NOMB равна S. Найдите длину стороны AC.*

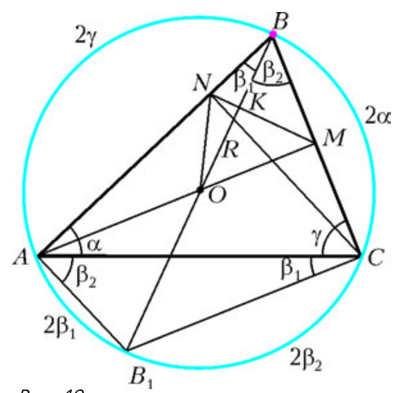


Рис. 10

Решение. Радиус $R = OB$ описанной окружности делит угол β на два угла: $\angle ABO = \beta_1$ и $\angle CBO = \beta_2$ такие, что (рис.10)

$$\beta_1 + \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

В четырехугольнике $ONBM$ диагонали перпендикулярны, и мы оказываемся в стандартной ситуации: точка B лежит вне окружности $ANMC$, а секущие BA и BC опираются на ее диаметр AC. Действительно, $\angle BNM = \pi - \angle ANM = \gamma$ и в треугольнике NKB, где K – точка пересечения OB и NM, $\angle BKM = \pi - (\beta_1 + \gamma) = \frac{\pi}{2}$, т.е. $BO \perp MN$. Кроме того, диагональ MN связана с искомой длиной AC:

$$MN = AC\cos\beta$$

из подобий треугольников: $\Delta BMN \sim \Delta BAC$, $\Delta BMA \sim \Delta BNC$. Другая диагональ $OB = R$ связана с AC через теорему синусов:

$$OB = R = \frac{AC}{2\sin\beta}.$$

Наконец, имеем $AC = 2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}$, поскольку площадь S четырехугольника равна $S = \frac{1}{2}R\cdot MN$, или $S = \frac{1}{4}AC^2\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

Задача 11. *Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.*

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 – основания высот остроугольного треугольника ABC, $A_1B_1 = 5$, $A_1C_1 = 12$, $B_1C_1 = 13$ (рис.11). Ясно, что $\Delta A_1B_1C_1$ является прямоугольным с прямым углом A_1, так что $S_{A_1B_1C_1} = 30$. Четырехугольник ABA_1B_1 вписан в окружность с диаметром AB. Мы пришли к уже известной геометрической конфигурации: из точки C вне окружности проведены секущие CA и CB, опирающиеся на диаметр AB. При этом стороны $\Delta A_1B_1C_1$ отсекают от ΔABC три подобных ему треугольника с коэффициентами подобия $\cos\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ соответственно. Кроме того,

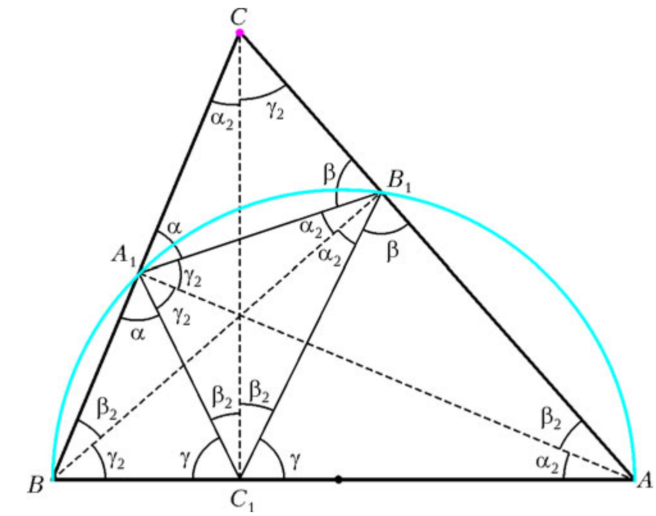


Рис. 11

высоты треугольника ABC являются биссектрисами ортотреугольника $A_1B_1C_1$. Действительно,

$$\begin{cases} \angle B_1A_1A = \dfrac{\pi}{2} - \angle CA_1B_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha, \\ \angle C_1A_1A = \dfrac{\pi}{2} - \angle BA_1C_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A = \frac{\pi}{2} - \alpha = \gamma_2 .$$

Аналогично,

$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha_2 ,$$

$$\angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C = \frac{\pi}{2} - \gamma = \beta_2 .$$

Между углами $\angle A_1 = 2\gamma_2$, $\angle B_1 = 2\alpha_2$, $\angle C_1 = 2\beta_2$ ортотреугольника $A_1B_1C_1$ и углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ исходного треугольника ABC имеется взаимооднозначное соответствие:

$$\begin{cases} \angle A_1 = 2\gamma_2 = \pi - 2\alpha, \\ \angle B_1 = 2\alpha_2 = \pi - 2\beta, \\ \angle C_1 = 2\beta_2 = \pi - 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \gamma_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle A_1) = \alpha_2 + \beta_2, \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle B_1) = \beta_2 + \gamma_2, \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta_2 = \dfrac{1}{2}(\pi - \angle C_1) = \alpha_2 + \gamma_2. \end{cases}$$

Остались вычисления. Для искомой площади S имеем

$$S = S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1B_1C} + S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} =$$

$$= 30 + S\left(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta\right),$$

или

$$S\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma\right) = 30 .$$

Перейдем к углам ортотреугольника и получим

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma =$$

$$= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma_2 - \sin^2\alpha_2 - \sin^2\beta_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha_2 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\gamma_2 - 1\right) = \frac{2}{13} .$$

Окончательно имеем $S = 195$.

Задача 12. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.*

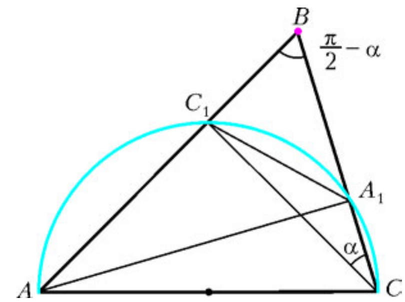


Рис. 12

Решение. Около четырехугольника AC_1A_1C можно описать окружность (так как отрезок AC виден из точек A_1 и C_1 под прямым углом), а секущие BA и BC опираются на ее диаметр AC (рис.12). Значит, коэффициент подобия треугольников BA_1C_1 и BAC есть

$$k = \cos\angle ABC = \cos\angle C_1BC =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \angle C_1CA_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha .$$

Для радиусов описанных около них окружностей имеем

$$\frac{R_{BA_1C_1}}{R_{BAC}} = k = \sin\alpha .$$

Но

$$R_{BAC} = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{2\cos\alpha} .$$

Поэтому

$$R_{BA_1C_1} = R_{BAC}\sin\alpha = \frac{1}{2\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha ,$$

и искомая площадь равна

$$S = \pi R^2_{BA_1C_1} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha .$$

Задача 13. *Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найдите DE и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45°$.*

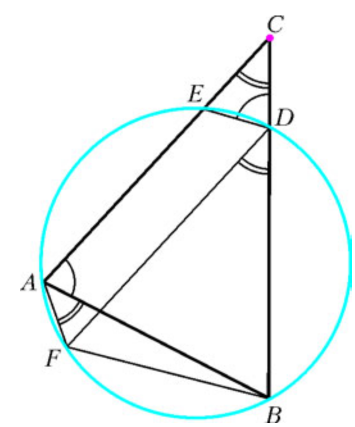


Рис. 13

Решение. Имеем стандартную и весьма распространенную геометрическую конструкцию (рис.13): из точки C к окружности проведены две секущие CA и CB. Четырехугольник $AEDB$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$:

$$\angle CAB + \angle BDE = 180° .$$

Но смежные углы с вершиной в точке D также составляют $180°$:

$$\angle CDE + \angle BDE = 180° .$$

Поэтому $\angle CAB = \angle CDE$. Значит, ΔCAB подобен ΔCDE по двум углам. Коэффициент подобия равен

$$k = \sqrt{\frac{S_{CAB}}{S_{CDE}}} = \sqrt{\frac{S_{ABDE} + S_{CDE}}{S_{CDE}}} = \sqrt{\frac{7+1}{1}} = 2\sqrt{2} .$$

Поэтому

$$DE = \frac{AB}{k} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Осталось найти радиус окружности. Проведем $DF \parallel AC$. Тогда $AF = DE = \sqrt{2}$. По теореме о вписанном угле, $\angle BAF = \angle BDF = \angle C = 45°$. По теореме косинусов для ΔABF имеем

$$BF^2 = AF^2 + AB^2 - 2AF \cdot AB \cdot \cos\angle BAF = 10,$$

$$BF = \sqrt{10}.$$

Согласно следствию из теоремы синусов, находим радиус окружности:

$$R = \frac{BF}{2\sin\angle BAF} = \sqrt{5}.$$

Задача 14. *На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot OA$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3 \cdot OB$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найдите MN.*

Решение. Примем такие обозначения: $OB = a$, $OA = b$, $\angle AOB = \alpha$, $MN = x$ (рис.14). По условию $MM_1 = 3b$, где

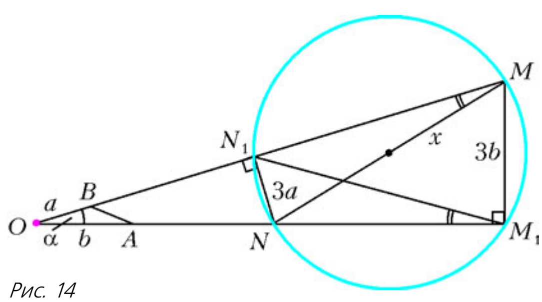


Рис. 14

$MM_1 \perp OA$; $NN_1 = 3a$, где $NN_1 \perp OB$; радиус описанной около треугольника OAB окружности $R_{AOB} = 3$.

В четырехугольнике MM_1NN_1 сумма противоположных углов равна $180°$ ($\angle MM_1N + \angle NN_1M = 90° + 90° = 180°$). Поэтому около него можно описать окружность. Диаметром ее является искомый отрезок MN. Получим типичную геометрическую конфигурацию: окружность и две секущие OM и OM_1, причем секущие проходят через концы диаметра MN. Здесь, как известно, имеются две пары подобных треугольников.

а) Треугольники ON_1N и OM_1M подобны как прямоугольные с общим острым (по условию) углом α.

б) Треугольники ON_1M_1 и ONM подобны по двум углам. Действительно, угол α у них общий, а углы OM_1N_1 и OMN равны в силу теоремы о вписанном угле (они опираются на одну и ту же дугу N_1N).

Так как ΔON_1N подобен ΔOM_1M, то $ON_1 : OM_1 = NN_1 : MM_1 = 3a : 3b = a : b$. Стороны треугольников OBA и ON_1M_1, прилежащие к общему углу α, пропорциональны:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому ΔOBA подобен ΔON_1M_1, $\angle OAB = \angle OM_1N_1$, прямые AB и M_1N_1 параллельны. Но $\angle OM_1N_1 = \angle NM_1N_1 = \angle OMN$. Значит, $\angle OAB = \angle OMN$ и ΔOAB подобен ΔOMN по двум углам. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{OA}{OM} = \frac{AB}{MN}, \quad MN = x = \frac{OM \cdot AB}{OA}.$$

Здесь $OA = b$, $OM = \dfrac{MM_1}{\sin\angle MOM_1} = \dfrac{3b}{\sin\alpha}$ (из ΔOMM_1), $AB = 2R_{AOB}\sin\alpha = 2 \cdot 3\sin\alpha = 6\sin\alpha$ (по теореме синусов для ΔAOB). Окончательно,

$$MN = x = \frac{3b \cdot 6\sin\alpha}{\sin\alpha \cdot b} = 18.$$

Задача 15. *Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем CE = DE. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если AB = 10, AE = 1.*

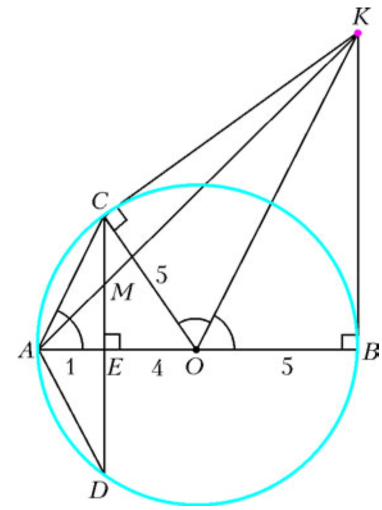


Рис. 15

Решение. Диаметр AB рассекает хорду CD, не являющуюся диаметром, на две равные части ($CE = ED$ по условию), значит, он перпендикулярен ей: $CD \perp AB$ (рис.15). Так как KB – касательная, то $KB \perp AB$. Поэтому $CD \parallel KB$.

Пусть O – центр окружности. По теореме Пифагора из треугольника CEO

$$CE = \sqrt{CO^2 - EO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Прямоугольные треугольники COK и BOK равны (OK – общая гипотенуза, $CO = OB = \frac{1}{2}AB = 5$). Поэтому $\angle KOC = \angle KOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$. Значит, ΔACE подобен ΔOKB (по двум углам) и

$$\frac{KB}{CE} = \frac{OB}{AE} \Rightarrow KB = \frac{OB}{AE} \cdot CE = \frac{5}{1} \cdot 3 = 15.$$

Но ΔAME подобен ΔAKB ($ME \parallel KB$), откуда

$$\frac{ME}{KB} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow ME = \frac{AE}{AB} \cdot KB = \frac{1}{10} \cdot 15 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM = CE - ME = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

В треугольнике CKM известны сторона (основание): $CM = \frac{3}{2}$ и высота, проведенная к ней: $BE = 9$. Поэтому

$$S_{CKM} = \frac{1}{2}CM \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{4} = 6{,}75.$$

Задача 16. *На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что прямые AB и DE пересекаются в точке K луча AB (рис.16). Секущие CA и CB опираются на диаметр AB. Коэффициент k подобия треугольников CDE и CAB равен косинусу угла C.

(Продолжение см. на с. 56)

XIV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии Университета города Ретимно (остров Крит, Греция), МГУ им. М. В. Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон». Олимпиада проходила с 9 по 16 октября 2005 года на территории уютного отеля «Rethymno bay», который расположен в городе Ретимно на берегу Средиземного моря.

На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В третий раз в олимпиаде участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией, и во второй раз – те школьники, которые выбрали историю и культурологию.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2005» по фундаментальным наукам в командном зачете стала сборная команда Краснодарского края (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – суперкубок и призы от спонсоров. Команда была также лучшей в турах по математике и истории научных идей и открытий, и ей были вручены соответствующие малые кубки соревнований. Второе место в общем зачете заняла команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Она также заняла первое место в туре по математике, второе место – по физике и истории научных идей и открытий. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла сборная команда Татарстана, которая также стала третьей в туре по физике. Ей был вручен кубок и дипломы за успехи в командных соревнованиях.

В биолого-экологическом направлении олимпиады победу одержала сборная команда Казахстана, на втором месте оказались представители Норвегии и на третьем – России. Всем им были вручены кубки, дипломы и призы олимпиады.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Арсений Хапланов, ученик 11 класса Классического лицея 1 при РГУ. Ему были вручены большая золотая медаль и малая золотая медаль за первое место по математике. Вторым призером в общем зачете стал Никита Хохуля, ученик 11 класса лицея «ИСТЭК» города Краснодара. Ему были вручены большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Алибек Омарбеков из Казахстана, представляющий Центр «Дарын».

В индивидуальном зачете по физике лучшим стал Эльдар Гарифулин (11 кл., Классический лицей 1 при РГУ), ему была вручена малая золотая медаль. Владимир Сошенко (10 кл., МТЛ, Новороссийск) получил бронзовую медаль за третье место по физике. Даулет Дянгузин и Мади Дюлборысов (оба из Центра «Дарын») были награждены малыми серебряной и бронзовой медалями за второе и третье место по математике.

В индивидуальных соревнованиях по биологии и экологии победу одержала Юлия Меньчишева (Центр «Дарын»), ей была вручена золотая медаль. Второе место заняла Алия Джуматаева (Центр «Дарын»), а третьей оказалась Ha Tuyet Hai, представительница Норвегии. Им были вручены, соответственно, серебряная и бронзовая медали.

Победителем олимпиады по истории и культурологии стал Рустам Халиков (Центр «Дарын»), ему была вручена золотая медаль. Алиби Мустафин и Амина Капанова (Центр «Дарын») завоевали серебряную и бронзовую медали соответственно.

Все участники олимпиады получили сертификаты и памятные подарки олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XV Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которую планируется провести в октябре 2006 года в Норвегии.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-80-14, факс: (495)396-82-27,

e-mail:gluon@yandex.ru

(см. также сайт: www.informika.ru\text\goscom\gluon)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Может ли число вида

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$$

быть простым?

2. Вне правильного треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M, для которой $\angle CMA = 30°$, $\angle BMA = 45°$. Найдите угол ABM.

3. Решите уравнение $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

4. Можно ли разбить числа 1, 2, ..., 30 на группы: а) по 5 чисел; б) по 6 чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковы?

5. В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AL и высота AH. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AL = l$, $AH = h$ и AL является медианой треугольника MAH.

6. Пусть $\alpha > 1$ – корень уравнения $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$. Вычислите

$$\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}.$$

7. Можно ли отметить на плоскости 225 точек так, чтобы наибольшее из расстояний между ними было не больше 21, а наименьшее – не меньше 3?

Физика

1. Брусок массой M стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис.1). На бруске закреплен штатив, к которому на нити длиной l подвешен груз массой m. Какую наимень-

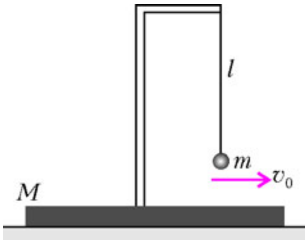


Рис. 1

шую горизонтальную скорость v_0 надо сообщить грузу, чтобы он совершил полный оборот в вертикальной плоскости?

2. По одной из гипотез, звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гравитационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $2\cdot10^{-20}$ г/см^3.

3. Два груза массой m соединены нитью длиной L и лежат на гладком столе. Середину нити начинают перемещать горизонтально с ускорением a в направлении, перпендикулярном нити. Какое количество теплоты выделится при неупругом ударе грузов?

4. Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.

5. Один моль идеального газа находится при температуре 300 К. Его объем увеличивают в 5 раз так, что теплоемкость газа остается постоянной и равной 5000 Дж/К. Оцените, на сколько изменится температура газа.

6. Два маленьких шарика, лежащих на гладкой горизонтальной плоскости, соединены невесомой пружиной. Шарики зарядили одноименными зарядами, в результате чего пружина растянулась в три раза. Во сколько раз изменится частота малых колебаний системы?

7. Проволочный предохранитель перегорает при напряжении 300 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить в 3 раза, а диаметр – в 2 раза?

Экология

1. Важная биологическая роль микроэлементов хорошо известна и доказана: она связана с активизацией каталитической активности многих ферментов. Исследования этого вопроса свидетельствуют, что от содержания и пропорций микроэлементов зависит иммунитет организма, возможность развития ряда заболеваний – рахита, нарушения кроветворения у человека, в сельском хозяйстве – урожайность, сроки вегетации и пищевая ценность растений. Поэтому важно иметь представление об источниках и путях формирования микроэлементного состава в природной среде и живых организмах. Ученые выяснили, что относительное содержание и пропорции таких микроэлементов, как сера, калий, хром, медь, цинк, мышьяк, селен, серебро, йод, кадмий, олово, сурьма, цезий, золото, ртуть, свинец, висмут, различны в разных средах. Больше всего их, например, в организмах растений, а почвы богаче, чем основные породы. Максимально обогащены ими воды океанов и глобальные аэрозоли. Различие в микроэлементном составе смежных и взаимно проникающих сред весьма существенно, и объяснить его нельзя, исходя из сложившихся представлений о миграции химических элементов. Тщательное изучение проблемы показало, что коэффициенты обогащения сред микроэлементами закономерно уменьшаются в ряду: глобальные аэрозоли – вода океанов – мхи – высшие наземные растения – почва – земная кора – изверженные вулканами породы. Дайте научное объяснение наблюдаемым фактам.

2. Строительство автомобильных дорог и скоростных линий железнодорожного транспорта является неотъемлемой чертой современной цивилизации. Оцените экологические последствия техногенного воздействия высокоскоростной железнодорожной магистрали Санкт-Петербург – Москва, которая частично пройдет с севера на юг по зоне Валдайского заповедника, откуда берут свое начало такие великие реки европейской равнины, как Волга, Днепр, Западная Двина, и где сосредоточено много озер, в том числе Селигер и Валдайское.

3. Создавая заповедники или национальные парки, человек берет на себя ответственность за сохранность и приумножение видов животных и растений на охраняемой территории. Зачастую вмешательство человека приводит к серьезным нарушениям сложившегося баланса численности между хищником и жертвой. Дайте объяснение результатам одного из таких неудачных экспериментов, когда на одну из заповедных территорий умеренной климатической зоны, где проживала пара хищник – жертва, представленная рысью и зайцем, был подселен кролик из Канады, обладающий большей плодовитостью, чем заяц. В результате через определенный период вместо ожидаемого прироста численности рыси в заповеднике исчезли зайцы, кролики и рысь. Постройте теоретическую кривую изменения численности животных.

4. В старинных трактатах есть сведения о том, что птицы, как и млекопитающие животные, могут впадать во временное оцепенение при понижении температуры окружающей среды. Например, у Аристотеля говорится, что такой способностью обладают аисты, скворцы и дикие голуби, которых во время холодов находили в состоянии оцепенения или зимней спячки. Возможно ли это? А как птицы переживают неблагоприятный период: суточный, сезонный, погодный?

5. Озеленение городской среды – важный фактор сохранения здоровья человека. Какие принципы должны соблюдаться при посадке в парках и скверах, а также вдоль автомобильных трасс древесных растений, таких как береза, тополь, ель, клен, конский каштан, сосна, дуб, береза, лиственница, осина, сирень, боярышник, рябина, черемуха, туя, вяз, ясень, шиповник? Ответ обоснуйте.

6. Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) предупреждает о серьезной опасности эпидемии атипичной пневмонии, в которой повинен вирус птичьего гриппа. Как вы думаете, почему существует такая опасность и каковы пути решения этой проблемы?

Биология

1. Современные биотехнологии позволяют выращивать культуру клеток, формировать из нее ткань, орган или целый организм. В начале 2005 года в одном научном медицинском учреждении успешно завершился эксперимент по восстановлению небольшого участка спинного мозга в результате пересадки в поврежденный позвонок клеток, взятых из слизистой носа парализованного пациента. Восстановление целостности нервной ткани было настолько полным, что у пациента восстановилась подвижность парализованных прежде нижних конечностей. Дайте теоретическое обоснование этого эксперимента.

2. Стремительные темпы развития современной иммунологии расширяют не только наши знания о защитных силах организма, но и о жизни как биологическом процессе. Исследования последних лет показали, что иммунная система не только борется с внешней инфекцией, но и оберегает сердце, сосуды, почки, органы дыхания, активно участвует в поддержании гомеостаза организма. Какие проблемы, несмотря на достигнутые определенные успехи (какие?) в этой области, стоят перед иммунологами?

3. Опыт длительных космических полетов или высокогорных восхождений показал, насколько важную роль играет питание, например спортсмена, в экстремальных условиях. Какую роль должна выполнить пища, в каком виде могут быть представлены необходимые продукты, какого состава должна быть пища в определенные периоды восхождения во время пребывания на разных высотах (в начале, середине и на заключительном этапе)? Ответ обоснуйте, учитывая как можно больше факторов.

4. Как вы думаете, от каких условий и факторов зависит форма птичьих стай? Почему стая группы ныряющих птиц, таких как гагары, поганки, крохали, бакланы, имеет вид четких линий – цепочек, углов, змеек; стаи нырковых уток выглядят более плотными, принимая форму заполненных углов; вороны, галки и грачи собираются в скученные, но упорядоченные стаи; для сорок и соек характерны скученные, беспорядочные, рыхлые стаи? Какой может быть общая закономерность формирования стай?

5. Почти четыре десятилетия функциональная асимметрия полушарий человеческого мозга прочно удерживает первенство среди направлений исследования головного мозга. Явление асимметрии является неоднозначным: какими-то свойствами обладает только одно из полушарий, какими-то – оба, но в разной степени, и все это находится в сложнейшей взаимосвязи и взаимодействии. Полушария по-разному воспринимают явления окружающего мира, различна их роль в творческой работе, неодинаково их отношение ко времени. Какие факты из этой области знаний вам известны? В ходе каких экспериментов можно доказать явление асимметрии?

6. Весной или поздней осенью большинство людей ощущают усталость, чувствуют себя вялыми, буквально «засыпают на ходу». Степень усталости у каждого проявляется строго индивидуально, но снижение работоспособности, рассеянное внимание, невозможность сосредоточиться на чем-то наблюдается у всех людей. Чем обусловлено такое явление? Какой должна быть профилактика подобных явлений? Серьезные научные исследования свойств ряда растений показали наличие в них веществ, оказывающих благотворное воздействие на организм человека. Какими целебными свойствами обладают женьшень, лимонник, родиола розовая, левзея сафлоровидная, элеутерококк колючий, аралия маньчжурская, заманиха высокая и другие растения-биостимуляторы, о которых вы знаете?

История и культурология

Примеры исторических тем

1. *Крестовые походы и западноевропейское Средневековье*

1) Причины крестовых походов.
2) Хронология крестовых походов.
3) Латинское королевство.
4) Социальные последствия крестовых походов в Европе.
5) Влияние крестовых походов на западноевропейскую культуру.

2. *Русь, Россия и Западная Европа*

1) Взаимодействие Древней Руси со странами Западной Европы (от Святого Владимира до Михаила Романова).
2) Иностранцы в Москве в XVII веке.
3) Петр I и Западная Европа.
4) Роль России в европейской политике в XIX веке.

Примеры культурологических тем

1. *Каменная летопись*

1) Афинский акрополь V в. до н.э.
2) Готика – духовный замысел и технические находки.
3) Каменная сказка – московский собор Василия Блаженного.
4) Архитектура эпохи Возрождения.
5) Эссе на тему «Архитектура – искусство или инженерная мысль?»

2. *Роман в стихах «Евгений Онегин»*

1) Хронология написания романа.
2) Хронология действия романа (от рождения главных героев до его последней сцены).
3) Природный фон романа – смена времен года и описания природы на севере и на юге России.
4) Загадка поведения секунданта Ленского Зарецкого накануне и в день дуэли.
5) Эссе на тему «Пушкинский «Татьяны милой идеал».

Устный командный тур

Математика

1. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше – доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний до катетов минимальна.

3. Можно ли $3a^4+1$ (a – целое число) представить в виде суммы трех квадратов целых чисел?

4. Прямая l, перпендикулярная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает прямые AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BE.

5. В семье шестеро детей. Пятеро из них, соответственно, на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего. Сколько лет младшему, если возрасты всех детей – простые числа?

6. Существуют ли на плоскости 6 точек такие, что любые три из них являются вершинами равнобедренного треугольника?

7. Найдите наименьшее значение функции

$$\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}\,.$$

8. Первые цифры чисел 5^n и 2^n одинаковы. Какие эти цифры?

9. Три грации, несущие по одинаковому количеству плодов, встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов, после чего у каждой музы и каждой грации стало по равному числу плодов. Сколько плодов было у каждой грации, если всего плодов у них было не больше 70?

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K – середина стороны BC, а площадь треугольника AKD равна половине площади всего четырехугольника. Найдите длину медианы KE треугольника AKD, если $AB = a$, $CD = b$.

11. Человек обычно приезжал на станцию одним и тем же поездом. К этому времени за ним обычно приходила машина и отвозила его домой. Однажды он приехал на 1 час раньше, пошел пешком, встретил по дороге машину и вернулся домой на 20 минут раньше обычного. Сколько времени он шел пешком?

12. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x+y^2+z^4=0, \\ y+z^2+x^4=0, \\ z+x^2+y^4=0\,? \end{cases}$$

Физика

1. Прямоугольный брусок, высота которого значительно превышает его длину и ширину, стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, имея лишь один измерительный прибор – линейку?

2. Конькобежец решил затормозить и свел вместе пятки, разведя при этом носки врозь (обычно тормозят наоборот). Как он будет двигаться дальше, если продолжает удерживать ступни в этом положении?

3. Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить полено?

4. Моллюск выращивает жемчужину, причем скорость увеличения ее радиуса обратно пропорциональна квадрату радиуса ($\Delta R/\Delta t \sim R^{-2}$). За первый месяц радиус достиг значения 0,5 мм. Через сколько месяцев после этого ее радиус станет равным 1 мм?

5. Стенки сосуда, заполненного газом с температурой T, быстро нагрели (или охладили) до температуры T_1. Что произойдет с давлением газа?

6. Открытая с концов длинная трубка высовывается из воды на 10 см. Верхний конец трубки закрывают, после чего воздух в трубке нагревают от 20 до 100 °С. Оцените, насколько надо при этом переместить трубку вверх, чтобы уровень воды в трубке остался на уровне воды в сосуде.

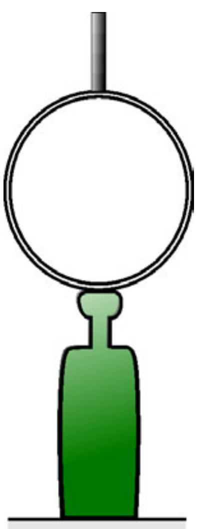


Рис. 2

7. Деревянное кольцо (пяльцы) помещают вертикально на открытую бутылку, а сверху аккуратно ставят вертикальный узкий цилиндр (рис.2). Предлагается, не дотрагиваясь до цилиндра, переместить его внутрь бутылки.

8. Имеется некоторая масса воды при температуре T и другая такая же масса воды при температуре $2T$. Можно ли сделать так, чтобы температура всей первой массы воды стала больше, чем температура всей второй массы? Теплообмен с другими телами запрещен.

9. Как изменится период колебаний математического маятника, если в точку подвеса и на грузик поместить одноименные заряды?

10. По торцу длинного стеклянного цилиндра ползает муха, а на боковой поверхности сидит паук. Где должен находиться паук, чтобы он мог видеть муху? Показатель преломления стекла 1,5.

История и культорология

Примеры исторических тем

1. *История лошади*

Переход человечества от палеолита к неолиту связан с появлением производительной экономики – вместо собирательства и охоты, как единственных способов получения пищи, появилось вначале земледелие, а потом и скотоводство. Иногда этот переходный период называют мезолитом. В мезолите и раннем неолите были одомашнены вол, овца, свинья. Однако лошадь была одомашнена много позднее.

1) Когда (с точностью плюс-минус 1000 лет) были впервые приручены вол, осел, овца, свинья?

2) Когда (с точностью плюс-минус 500 лет) была приручена лошадь?

3) Для каких целей вначале использовалась лошадь?

4) Когда (с точностью плюс-минус 100 лет) лошадь стали использовать как тягловую силу для перевозок в сельском хозяйстве?

5) Какова роль лошади в истории Древнего Египта?

2. *Рыцари и вино*

На острове Кипр по старинным рецептам производят крепкий алкогольный напиток – настойку из трав, в названии которого фигурирует имя Святого Иоанна. Происхождение этого названия связано с тем, что на острове Кипр недолгое время (около 20 лет) находилась резиденция монашеского духовно-рыцарского ордена иоаннитов.

1) Почему иоанниты так себя называли?

2) Приведите другие названия членов этого ордена.

3) Назовите места резиденций этого ордена в Средиземноморье после Кипра.

4) Кто был Великим Магистром этого ордена в 1798–1801 годах?

Примеры культурологических тем

1. *Чудеса*

1) Расположите в хронологическом порядке 7 чудес света.

2) Когда (с точностью до века) был составлен перечень семи чудес света, «действующий и сейчас»?

3) Почему в перечень чудес света были включены именно 7 объектов? Аристотель, например, составил список из 178 природных и рукотворных чудес.

2. *Венера в истории культуры*

Самые древние памятники в истории художественной культуры носят название «палеолитические Венеры».

1) Что они собой представляют?

2) Каков «возраст» этих находок?

3) Почему они носят такое название?

4) Какие другие имена этой богини вам известны?

5) Какой античный скульптор прославился ее статуями? Когда он их сделал (с точностью до века)?

Быстрые (минутные) ответы на вопросы

1) В каком веке жил и кем был человек, в память о котором город Сан-Франциско получил свое название?

2) В каком веке какой король обиделся на Голландию, в которой выпустили медаль, где было изображено солнце, закрываемое облаками?

3) На двухдолларовой купюре США изображен составитель конституции этой страны, в основном действующей и поныне. Назовите его.

4) Кто правил на Руси, когда д'Артаньян, согласно Дюма, стал маршалом Франции?

5) Какое государство, единственное на всем американском континенте, во время второй мировой войны поддерживало дипломатические отношения с Германией и Японией?

6) Каковы были значения слова «культура» в первом тысячелетии до н.э.?

7) Почему одно из величайших творений византийской иконописи XI века носит название «Богоматерь Владимирская»?

8) Какие памятники технической культуры Древнего Рима и сейчас используются по своему прямому назначению? Где они находятся?

9) Какой европейский художник впервые стал использовать в живописи масляные краски? Когда? (с точностью плюс-минус 50 лет).

10) Какая особенность древнегреческой архитектуры была «возрождена» в XV веке архитектором Брунеллески?

История научных идей и открытий

Математика

1. Назовите нескольких математиков – современников д'Артаньяна.

2. Знаменитый немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц считал, что многочлен x^4+1 нельзя разложить на 2 множителя с действительными коэффициентами. Согласны ли вы с ним?

3. В VII веке индийский математик Брахмагупта сумел записать выражение

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$$

без «двухэтажных» радикалов. Проделайте это и вы.

4. В «Книге лемм», приписываемой Архимеду, имеется замечательное предложение: «Продолжи хорду AB произвольного круга на отрезок BC, равный радиусу, и проведи через C диаметр FDE. Тогда дуга AE будет втрое больше дуги BF». Докажите это предложение.

5. Леонард Эйлер доказал, что $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ $\ldots=\frac{\pi^2}{6}$. Также он нашел сумму $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots$ Найдите ее и вы.

Физика

1. Это понятие родилось в Древней Греции. Его древнегреческое название всем нам хорошо известно. Древнеримские философы придумали для него термин «квинтэссенция». Через 2000 лет, в XIX веке, это понятие, звучащее снова на греческом, широко использовалось в физике, однако впоследствии физики дружно от него отказались.

1) Как мы называем (по-гречески) это понятие?

2) Как оно переводится на русский язык?

3) Какой философ впервые его ввел для объяснения мира и когда (с точностью до века)?

4) Как переводится на русский язык «квинтэссенция» и почему древнеримские философы использовали именно этот термин?

5) Под влиянием работ какого ученого физики начали отказываться от этого понятия? Когда (хотя бы приблизительно) это произошло?

2. Размеры Земного шара впервые определены греком.

1) Когда (с точностью до века) это произошло?

2) Назовите имя этого грека.

3) Где это было (современное название страны)?

4) Что именно и каким прибором было измерено?

5) Как по измеренным данным этот грек вычислял радиус Земли? Какие еще величины ему были нужны для расчета?

3. Полоса полного солнечного затмения 29 мая 1919 года проходила в Южной Америке и Атлантическом океане. Для наблюдения за этим явлением были снаряжены две необычные экспедиции. Один из физических результатов наблюдений получил широчайшую огласку в прессе и известность среди людей, весьма далеких от физики.

1) С именем какого ученого связана известность этих наблюдений?

2) Что конкретно измерялось в этих экспедициях?

3) Какую теорию подтвердило одно из наблюдений?

4) Какие другие экспериментальные факты подтверждают эту теорию?

5) Какое значение имеет эта теория для современной человеческой деятельности?

4. Деление тяжелых ядер – это явление, широко используемое в современной энергетике и не только в ней.

1) Какой ученый (будущий Нобелевский лауреат) и когда впервые осуществил этот процесс в лаборатории (хотя и неправильно его интерпретировал)?

2) Какие ученые (один из них – будущий Нобелевский лауреат), повторив эти опыты, дали им правильное объяснение и поэтому считаются первооткрывателями явления?

3) Когда и где (страна, город) впервые заработал ядерный реактор?

4) Когда и где (страна, город) заработала первая промышленная атомная электростанция (мощностью 5 МВт)?

5) В каком государстве в наше время ядерная энергетика занимает ведущее место (свыше 75%) в получении энергии?

5. Одному великому физику в 58-летнем возрасте пришлось совершить необычное путешествие: сначала темной ночью через морской пролив в рыбачьей шхуне; затем около 1200 км в бомбовом отсеке бомбардировщика (потеряв при этом сознание из-за кислородного голодания); только после этого путешествие проходило в комфортабельных условиях океанского лайнера и трансконтинентального экспресса.

1) Назовите имя этого ученого.

2) Укажите маршрут путешествия (страны, города) – начальный, промежуточные и конечный пункты.

3) Когда это было?

4) Каковы были причины этого путешествия?

5) Перечислите основные научные достижения этого ученого.

Экология и биология

1. Наука диетология имеет древнюю историю. Назовите имя ученого, известного своими величайшими достижениями в области искусства врачевания и при жизни удостоившегося заслуженной славы, которому также принадлежит трактат «О диете при острых болезнях», положивший начало рациональной диетологии. При лечении различных заболеваний им были установлены диеты применительно к формам болезней – острых, хронических, хирургических и других. Как часто его имя вспоминают и произносят сегодня?

2. Назовите ученого-естествоиспытателя, который способствовал использованию химических препаратов в медицине, критиковал учение Галена и Авиценны и на первой же лекции в Базеле на глазах изумленных студентов сжег трактаты этих ученых. На его надгробии выбита эпитафия: «Здесь погребен превосходный доктор медицины, который тяжелые раны, проказу, подагру, водянку и другие неизлечимые болезни тела идеальным искусством излечивал и завещал свое имущество разделить и пожертвовать беднякам. В 1541 году на 24 день сентября сменил он жизнь на смерть».

3. Андреас Везалий справедливо считается создателем современной анатомии. В 1543 году был напечатан его знаменитый трактат «О строении человеческого тела» в семи книгах. Взгляды этого ученого выходили за рамки медицинской науки, так как затрагивали церковное вероучение. Как вы думаете, чему была посвящена критика Библии великим ученым?

4. Назовите ученого, продолжив перечень ученых, которым за открытие в одной области благодарными потомками поставлены памятники: в Мадриде – Мигелю Сервету, в Болонье – Карло Руини, в Пизе – Андреа Чезальпино, в Англии – ? Какое открытие ими было сделано и в чем его суть?

5. В историю науки этот ученый вошел не только как автор фундаментальных открытий и первый в мире организатор науки, но и как автор многих изобретений, одно из которых связано с регистрацией кислотности среды. Из чего было получено это вещество? Как называются такие вещества? Назовите имя ученого, а также скажите, как впоследствии была названа основанная им организация «Общество наук»?

6. Этого естествоиспытателя научный мир в 1680 году избрал действительным и равноправным членом Лондонского Королевского общества в нарушение существующего правила. Какого? Кто был этот естествоиспытатель, которому принадлежат слова: «Все мои старания направлены к одной только цели – сделать очевидной истину и приложить полученный мной небольшой талант к тому, чтобы отвлечь людей от старых и суеверных предрассудков»? Какие открытия им были сделаны? Известно, что открытия этого естествоиспытателя явились идеей для написания Джонатаном Свифтом своего знаменитого произведения «Путешествия Гулливера».

7. Деятельность этого ученого положила начало реформе науки биологии. Он не открыл новых областей знаний и неизвестных дотоле законов природы, но создал новый метод, посредством которого внес ясность, логику и порядок туда, где до него царили хаос и сумятица. Это был важный и необходимый вклад в науку, без которого ее дальнейший прогресс был бы невозможен. Назовите имя этого ученого и метод, который он предложил.

8. Многоплановая деятельность и изыскания этого ученого создали науку «ботаническая география», определили ее содержание. Назовите имя этого ученого и принцип, который был им положен в основание этой науки. Известно, что публичные лекции, прочитанные ученым, привлекали множество слушателей, среди которых можно было встретить представителей всех сословий: членов королевской семьи, важнейших сановников, придворных дам, студентов, профессоров и литераторов, ремесленников, торговцев, крестьян. Один из журналистов того времени писал в газетном отчете: «Зал не вмещал слушателей, а у слушателей не вмещалось в головах содержание лекции». В настоящее время существует ежегодно присуждаемая стипендия для проведения научных исследований в области естествознания, носящая имя этого ученого.

9. Автором теории типов, основанной на сравнительно-анатомических данных, по праву приоритета считается Жорж Кювье, опубликовавший свою теорию в 1812 году. Карл Бэр самостоятельно пришел к подобным же выводам. Хотя труд его был напечатан в 1826 году, он также считается наряду с Кювье основателем теории типов. Какие дополнительные исследования дали ему такое право?

10. Термин «фенетика» (от греческого phaino – являю, обнаруживаю) введен в 1973 году российским биологом, одним из основоположников радиационной генетики, биоценологии и молекулярной биологии, сто пятую годовщину со дня рождения которого научное сообщество отмечает в этом году. Что изучает эта наука и о каком ученом идет речь?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, Б.Алиев, Л.Белопухов, А.Егоров, Ж.Раббот, А.Черноуцан

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

29 ноября 2005 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошла Всероссийская олимпиада по физике среди студентов технических вузов.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (131,5 балла), второе место – команда из Санкт-Петербурга (102,25 б.), третье место – команда Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева (76,25 б.).

В личном зачете первое место завоевал Алексей Майстров (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 45,5 балла), второе место – Александр Бурцев (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 44 б.), третье место – Ренат Галимов (Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королева, 43 б.).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Жук прополз не поворачивая по поверхности шара радиусом R расстояние, равное R, затем повернул на 90° и прополз еще такое же расстояние. Определите расстояние по поверхности шара, на котором оказался жук, относительно начальной точки.

2. Космический корабль с начальной массой m_0 разгоняется в свободном пространстве от нулевой начальной скорости. Определите максимальную кинетическую энергию, которую способен набрать корабль, если скорость истечения реактивной струи равна u.

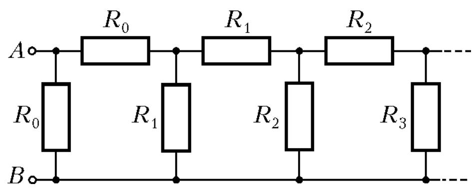
3. Вокруг Земли по стационарной круговой орбите радиусом R движется космическая станция. Вслед за ней на расстоянии $L \ll R$ по той же орбите с такой же скоростью движется космический корабль. Определите минимальную характеристическую скорость корабля, необходимую для осуществления мягкой стыковки со станцией в течение одного периода обращения станции вокруг Земли. Характеристическая скорость – это скорость, которую приобретет корабль в свободном пространстве, затратив такое же количество топлива.

4. Шар радиусом R скатывается по двум параллельным ножам, расстояние между которыми равно $R\sqrt{2}$. Угол скатывания равен 30°. Между одним из ножей и шаром имеет место постоянное проскальзывание, и сила трения равна f. Между другим ножом и шаром проскальзывание отсутствует. Определите ускорение, с которым скатывается шар.

5. Через длинную трубу прокачивается идеальный газ с молярной массой M. На входе трубы температура газа T_0 и скорость v_0. В середине трубы газ нагревается от стенок таким образом, что давление на выходе изменяется вдвое. Определите скорость газа на выходе из трубы.

6. Два произвольных металлических тела удалены друг от друга. Если первое тело заряжено зарядом q, а второе полностью разряжено, то работа по их сближению равна A_1, при этом потенциал второго тела оказывается равным φ_3. Если второе тело заряжено зарядом q, а первое полностью разряжено, то аналогичная работа равна A_2. Определите работу по сближению, когда оба тела заряжены зарядом q, а их потенциалы в начальном состоянии равны φ_1 и φ_2 соответственно.

7. Определите сопротивление между точками A и B бесконечной цепочки (см. рисунок), собранной из резисторов с сопротивлениями $R_0 = R$, $R_1 = \alpha R$, $R_2 = \alpha^2 R$ ...



8. Вдоль оси симметрии магнитного поля индукция меняется по закону $B = bx$. Вдоль этой оси без изменения ориентации в пространстве может перемещаться кольцо из сверхпроводника радиусом R, индуктивность которого L. В начальный момент времени кольцо находится в начале координат $x = 0$ и по нему протекает ток I_0 таким образом, что магнитный момент направлен по оси. Каково максимальное смещение кольца от начального положения?

9. Свет с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает на фазовую пластинку, выполненную из стекла с показателем преломления n. Толщина пластинки $d = d_0 + m(n-1)\lambda/4$, где m – порядковый номер зоны Френеля. Число зон Френеля, помещающих на площади пластинки, равно 10. Определите интенсивность света в точке наблюдения.

Публикацию подготовили В.Голубев, М.Яковлев

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при физическом факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений – таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование. Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 октября 2006 года* по адресу:

119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите анкету (заполненную по приведенному образцу) и конверт с Вашим адресом.

Фамилия, имя, отчество	*Ковалевский Владимир Леонидович*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать – врач, отец – инженер*
Подробный домашний адрес	*120713 Москва, ул.Столетова, д.3, кв.13*
Номер школы	*школа 564*

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет эти удостоверения учитываются приемной комиссией).

Справки по телефону (495) 939-54-95.

Для проживающих в Москве и Московской области имеется Вечерняя физико-математическая школа. Телефон для справок 939-38-78 (с 14 до 16 часов по рабочим дням).

Вступительное задание

10 класс

1. На рисунке 1 приведен график зависимости скорости материальной точки, движущейся прямолинейно, от времени. Постройте график изменения со временем средней скорости и вычислите ее значение в конечный момент времени τ. Ускорения a и b и время T считайте известными.

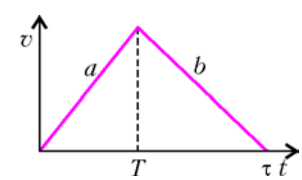


Рис. 1

2. Шарик, летящий прямолинейно со скоростью v, налетает на стенку, которая движется навстречу шарику со скоростью u (рис.2). Происходит абсолютно упругий удар. Определите скорость шарика после удара. Ответ дайте в векторной форме.

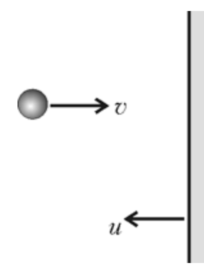


Рис. 2

3. Человек спускается по ходу движущегося эскалатора. В первый раз он насчитал $n = 100$ ступенек, а во второй раз, когда шел втрое быстрее, он насчитал $m = 150$ ступенек. Сколько ступенек человек насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

4. Автобус движется по шоссе со скоростью v_1. В поле на расстоянии H от шоссе и на расстоянии L от автобуса находится человек, который может двигаться по полю со скоростью v_2. В каком направлении должен двигаться человек, чтобы успеть к автобусу в какой-либо точке шоссе?

5. С крыши дома вертикально вниз бросают камень с начальной скоростью v_0 Через время τ с такой же начальной скоростью v_0 бросают вертикально вверх второй камень. Найдите зависимость от времени t скорости v_2 второго камня относительно первого и расстояния l между ними ($t > \tau$).

6. Мальчик бросает теннисный мяч, который, ударившись в стену, падает точно к его ногам. Какова была начальная скорость мяча, если расстояние до стены L, бросок сделан под углом $45°$ к горизонту и в момент броска мяч находился на начальной высоте h?

7. Ось вращающегося диска движется поступательно со скоростью v_0. Определите мгновенную скорость верхней точки диска, если известна скорость его нижней точки v_1. Ответ дайте в векторной форме.

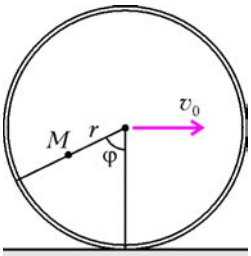


Рис. 3

8. Колесо радиусом R катится со скоростью v_0 по горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис.3). Найдите мгновенную скорость точки M. Угол φ и расстояние r от точки M до центра колеса считать известными.

11 класс

1. Металлическое кольцо радиусом R имеет заряд $+Q$. Определите зависимость напряженности и потенциала поля от расстояния d до центра кольца вдоль оси, перпендикулярной плоскости кольца.

2. Два одинаковых металлических кольца закреплены соосно на расстоянии d друг от друга и заряжены противоположными по знаку зарядами $+Q$ и $-Q$ (рис.4). Для пролета вдоль оси положительно заряженная частица должна обладать минимальной скоростью v_0. Найдите отношение максимальной скорости частицы к минимальной во время пролета вдоль оси, если ее начальная скорость на большом расстоянии от колец будет равна nv_0.

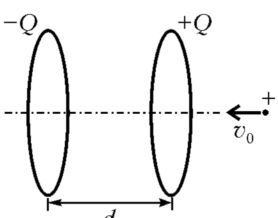


Рис. 4

3. Внутри толстостенной металлической сферической оболочки с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) на расстоянии $d < R_1$ от центра помещен точечный заряд Q. Определите потенциал центра оболочки.

4. В системе из трех концентрических металлических сфер с радиусами R_1, R_2 и R_3 крайние сферы заземлены, а средней сообщен заряд Q. Определите напряженность электростатического поля внутри и вне сфер.

5. Конденсаторы с емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Затем батарею отключили, а конденсаторы разъединили. Найдите заряды каждого конденсатора после их параллельного соединения одноименно заряженными пластинами.

6. Четыре конденсатора подключены к источнику, как показано на рисунке 5. Какой заряд протечет по резистору R_1, если ключ K замкнуть? Емкости конденсаторов равны $C_1 = 2$ мкф, $C_2 = C_3 = C_4 = 1$ мкф, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10$ В.

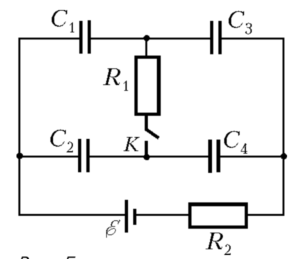


Рис. 5

7. На одну из пластин плоского конденсатора емкостью C поместили заряд $-q$, на другую пластину поместили заряд $+mq$. Определите разность потенциалов между пластинами.

8. Металлическую сферу радиусом R_0, заряженную до потенциала φ_0, окружают проводящей концентрической сферической оболочкой радиусом r_0. Найдите потенциал шара после заземления оболочки.

Заочная школа при СУНЦ НГУ

Заочная школа (ЗШ) Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ) при Новосибирском государственной университете (НГУ) приглашает школьников расширить и углубить свои знания по школьным предметам, подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения на отделениях: математика, физика, химия, биология, психология, английский язык, французский язык, экономика, гуманитарное, журналистика.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются и факультативы. В любом общеобразовательном учреждении преподавателями математики, физики, химии, биологии и иностранного языка могут быть организованы факультативные группы для занятий по программе ЗШ. В течение учебного года руководители факультативов получают методические материалы ЗШ, задания и решения, информационно-рекламные материалы НГУ с правилами приема, приглашаются на курсы повышения квалификации учителей на базе СУНЦ НГУ. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением, в котором организован факультатив, как факультативные занятия (по предоставлению Заочной школой соответствующих сведений). Факультативные группы по физике и химии обучаются бесплатно.

Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей. Для учеников сельских школ устанавливается более низкий уровень оплаты.

Ежегодно ученики, успешно занимающиеся в ЗШ, приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в Новосибирском Академгородке с 5 по 25 августа. По окончании работы Летней школы успешно прошедшим отбор предлагается зачисление в состав учащихся СУНЦ НГУ. Выпускники СУНЦ НГУ получают аттестат о среднем образовании и имеют возможность по результатам выпускных экзаменов быть зачисленными на факультеты Новосибирского государственного университета.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании 11 класса получают удостоверение ЗШ. При поступлении в НГУ они, при прочих равных условиях, имеют приоритет при зачислении.

Чтобы поступить в Заочную школу СУНЦ НГУ, необходимо прислать в адрес ЗШ выполненное первое задание и заявление. В заявлении нужно указать фамилию, имя отчество (полностью, печатными буквами); класс, в котором Вы учитесь в школе; отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться; подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон (с кодом), e-mail. Руководитель факультатива кроме вышеперечисленного должен прислать алфавитный список учеников.

Решения задач первого задания запишите в простую (тонкую) ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку). Для получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Зачисление в школу производится круглогодично. Заявления о приеме высылайте по адресу: *630090 Новосибирск-90, ул. Ляпунова, 3, Заочная школа СУНЦ НГУ*

Телефон: (383) 339-78-89

E-mail: distant@sscadm.nsu.ru

Сайты: http://sscadm.nsu.ru и http://profile.edu.ru

Первое задание на математическое отделение

9 класс

1. Две одинаковые шоколадки, три одинаковых мороженых и четыре одинаковые конфеты стоят 115 рублей, а такие же три шоколадки, два мороженых и одна конфета стоят 110 рублей. На сколько рублей шоколадка дороже конфеты?

2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, один из углов которого 30°, отрезок перпендикуляра, проведенного к середине гипотенузы до пересечения с катетом и лежащего внутри треугольника, в 3 раза меньше большого катета.

3. На какое максимальное число нулей может оканчиваться произведение трех чисел, сумма которых равна 407?

4. В квадрате $ABCD$ точка E делит диагональ AC в отношении $AE : EC = 4 : 1$. На стороне AB взята такая точка F, что угол DEF – прямой. В каком отношении делит сторону AB точка F?

5. Число 1 можно представить в виде суммы трех различных дробей, числители которых равны единице:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Можно ли представить число 1 в виде суммы четырех различных дробей, числители которых равны единице? А в виде суммы пяти различных дробей, числители которых равны единице?

6. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 21 на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных?

10 класс

1. Разложите на множители многочлен

$$9\left(a^2 + b^2 - 1\right) - 42ab + 40b^2 - 40.$$

2. Плоскость произвольным образом раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней всегда найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

3. Точки M и N выбраны на стороне AC треугольника ABC так, что угол ABM равен углу CBN. Докажите, что

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{CN}\frac{BN}{BM}.$$

4. Заседание комиссии началось между 13 и 14 часами, а закончилось между 16 и 17 часами. Найдите точное время длительности заседания, если известно, что в начале и в конце заседания часовая и минутная стрелки, поменявшись местами, занимали одни и те же положения.

5. На доске написаны сто ненулевых чисел. За один шаг разрешается менять знаки у любых трех чисел на противоположные. Можно ли за несколько таких шагов сделать все выписанные числа положительными?

6. Задан произвольный выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Постройте прямую, которая проходит через вершину A и делит этот пятиугольник на две части равной площади.

11 класс

1. Решите уравнение

$$|\, x - |\, 4 - x^2 \,|\,| = 2.$$

2. В двух сосудах емкостью 1 л и 0,6 л содержатся растворы соли различной концентрации. Два одинаковых стакана наполнили каждый из своего сосуда, после чего первый стакан вылили во второй сосуд, а второй – в первый. В результате в обоих сосудах получились растворы одной и той же концентрации. Найдите объем стакана.

3. Докажите, что число 111...111 – всего в записи 243 единицы – делится на 243.

4. В равнобедренном треугольнике две медианы имеют длину m. Найдите, чему равна наибольшая площадь такого треугольника.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2. Точки M и N – середины ребер SB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки A, M и N, пересекает ребро SC. Найдите длину бокового ребра пирамиды $SABCD$.

6. При каком наибольшем n все клетки доски размером $n \times 9$, где n – число строк, можно окрасить в три цвета так, чтобы для каждого цвета число клеток, окрашенных в этот цвет, в любых двух различных строках было разным?

Первое задание на физическое отделение

9 класс

1. Опоздавший на автобус пассажир спустя время $\tau = 20$ мин после его отъезда из пункта A сел в такси, чтобы пересесть на этот автобус на следующей остановке в пункте B. Такси обогнало автобус в момент, когда он уже прошел $2/3$ пути от пункта A до пункта B. Сколько времени t_x будет ждать пассажир автобуса в пункте B?

2. На автомобиле, имеющем специальное устройство, определяют с помощью звукового сигнала расстояние до поста ГБДД. Какое расстояние L было до поста в момент испускания звукового сигнала, если после отражения от будки его приняли на автомобиле через $t_0 = 12$ с? Скорость звука $v_з = 325$ м/с, скорость автомобиля $u = 90$ км/ч.

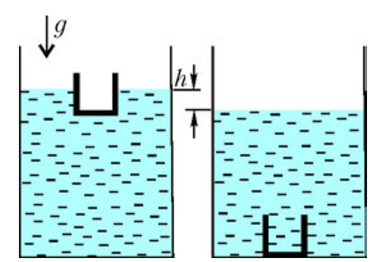


Рис. 1

3. Пустой толстостенный стеклянный стакан массой $m = 100$ г плавает в сосуде сечением $S = 0,05$ м^2, заполненным водой. После того как стакан утопили, уровень воды в сосуде поднялся на $h = 1$ мм (рис.1). Найдите плотность стекла $\rho_с$. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

4. Две одинаковые лампочки и один резистор сопротивлением R подсоединили к источнику напряжения U двумя способами, как показано на рисунке 2. В обоих случаях

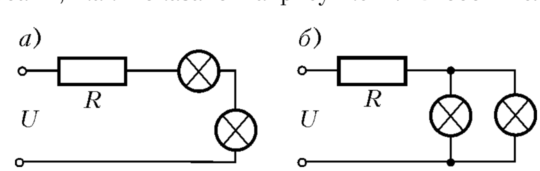


Рис. 2

накал лампочек один и тот же. Какой ток I протекает через одну лампочку?

10 класс

1. Решите задачу 2 для 9 класса.

2. На тело массой m, расположенное на горизонтальном шероховатом столе, действует горизонтальная сила F так, что оно движется с неким ускорением. После того как силу увеличили в два раза, ускорение стало в три раза больше. Определите коэффициент трения, если $F = 49$ Н, $m = 10$ кг, $g = 9{,}8$ м/с^2.

3. Шарик массой m_1 налетает на другой, покоящийся шарик (рис.3). После упругого лобового удара импульсы шариков стали одинаковыми. Найдите массу m_2 вначале покоящегося шарика.

Рис. 3

4. На проволочное кольцо радиусом R, расположенное в вертикальной плоскости, надета бусинка массой m. Бусинка соединена пружинкой с центром кольца. Пружинка деформирована таким образом, что в состоянии покоя кольцо действует на бусинку силой, равной mg и направленной вниз. Кольцо раскрутили вокруг вертикальной оси так, что бусинка перестала давить на кольцо. Определите угловую скорость вращения кольца ω и угол α, на который пружинка отклонилась от вертикали. Трением пренебречь.

5. На шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения μ, образующей угол α с горизонтом, покоится тело (рис.4). Тележка, которая вначале находилась на расстоянии L от тела, начинает скатываться. На какое максимальное расстояние сдвинется вниз тело, если удары между ним и тележкой абсолютно упругие? Массы тележки и тела одинаковы. Трением тележки при ее движении можно пренебречь.

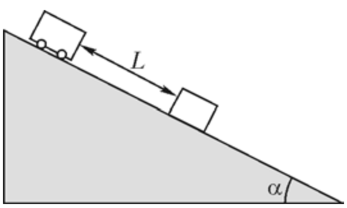


Рис. 4

11 класс

1. Решите задачу 3 для 10 класса.
2. Решите задачу 4 для 10 класса.
3. Решите задачу 5 для 10 класса.

4. Два моля газа сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в 2 раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначального значения $T_0 = 200$ К. Какая работа была совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. Два небольших одинаковых и сделанных из материала плотностью $\rho_м$ шарика заряжены одинаковыми по величине, но противоположными по знаку зарядами q. Шарики подвешены на тонких длинных нитях, проходящих через одну вертикаль, так, что расстояние между ними равно R (рис.5). После того как пространство заполнили керосином, оказалось, что натяжение нити, к которой привязан шарик *2*, не изменилось. Найдите силу натяжения этой нити и массу одного шарика. Плотность керосина $\rho_к$, его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

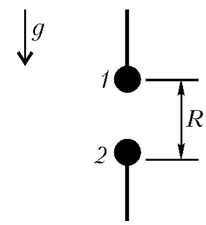


Рис. 5

Точка вне окружности

(Начало см. на с. 43)

Значит, с учетом условия $S_{CDE} = \frac{1}{2} S_{CAB}$,

$$\begin{cases} k = \dfrac{CE}{CA} = \cos\angle C, \\ k^2 = \dfrac{S_{CDE}}{S_{CAB}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\angle C = k = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle C = 45^\circ .$$

Для углов A и B имеем $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 135^\circ$. Кроме

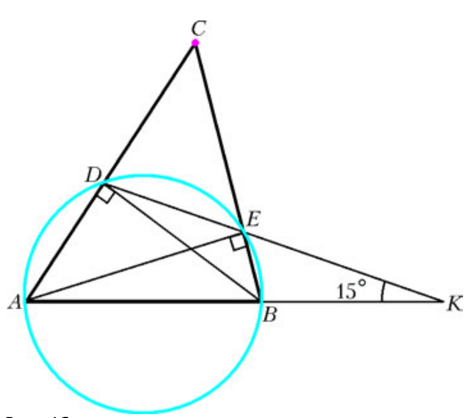


Рис. 16

того, из ΔKBE $\angle BEK = \angle A$ и по теореме о внешнем угле $\angle B = \angle BEK + 15^\circ = \angle A + 15^\circ$. Таким образом,

$$\begin{cases} \angle A + \angle B = 135^\circ, \\ \angle B - \angle A = 15^\circ \end{cases} \Rightarrow \ \angle A = 60^\circ \text{ и } \angle B = 75^\circ .$$

Упражнения

1. Диаметр MN и хорда PQ окружности пересекаются в точке R, причем MN перпендикулярен к PQ. Касательные к окружности в точках N и P пересекаются в точке L. Отрезки ML и PR пересекаются в точке S. Найдите диаметр окружности, если площадь треугольника PLS равна 2 и $MR = 1$.

2. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60^\circ$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности, а перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD, делит угол BAD пополам. Найдите длину диагонали AC четырехугольника.

4. В остроугольном треугольнике ABC, длина стороны AC которого равна 6, на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Вычислите площадь четырехугольника $AQPC$, если известно, что площадь треугольника BPQ равна 1, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $9\sqrt{2}/4$.

5. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны a и b соответственно. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.

6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP – точка N так, что углы BMC и ANC – прямые. Расстояние между точками M и N равно $4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 30^\circ$. Найдите биссектрису CL треугольника CMN.

7. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C – точки, в которых эта секущая пересекает окружность. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle AOC\right)$, если $OA = a$.

8. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12, 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» № 2)

1. На первый взгляд, Б, согласившись с А, называет себя лжецом, чего ни лжец, ни правдец сделать не могут. Однако Б просто высказал очевидную истину: что верно, то верно. Следовательно, Б – правдец, а А – лжец.

2. Так как дробь $\frac{a}{b}$ по условию существует, то $b \neq 0$. Поэтому числа $a + b$ и $a - b$ не равны, а остальные два равны одному из них.

Допустим, что $a = 0$. Тогда либо $0 - b = 0 \cdot b$, либо $0 + b = 0 \cdot b$, что невозможно, так как $b \neq 0$. Значит, $a \neq 0$ и в равенстве $ab = \frac{a}{b}$ можно сократить на a. Отсюда $b^2 = 1$. Случай $b = 1$, как легко проверить, условию задачи не удовлетворяет. Значит, $b = -1$ и, соответственно, $a = \frac{1}{2}$ или $a = -\frac{1}{2}$.

3. Нет, не верно. Возьмем прямоугольник $ABCD$ (рис. 1) и рассмотрим четыре треугольника ABC, BCD, CDA, DAB. Они удовлетворяют условию задачи, однако вершины, общей для всех четырех треугольников, не существует.

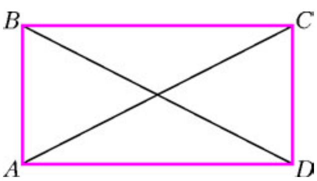


Рис. 1

4. Нет, не могут. Раскрасим кварталы города в шахматном порядке так, чтобы справа от первого велосипедиста в момент старта находился черный квартал. Докажем, что в каждый момент времени черный квартал находится справа от любого из велосипедистов. Действительно, пусть это было верно в некоторый момент времени. Доехав до конца квартала, велосипедист либо повернет налево, и тогда справа от него будет другой черный квартал, либо повернет направо, и тогда справа от него окажется тот же черный квартал.

Теперь докажем, что велосипедисты не встретятся. Очевидно, что они не могут встретиться на перекрестке. Поскольку велосипедисты едут с одной скоростью, они смогут встретиться, только если будут ехать навстречу друг другу. Но тогда получится, что черный квартал находится по левую руку от одного из велосипедистов. А это невозможно.

5. Решение основано на следующем известном свойстве делимости: остаток от деления натурального числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы его цифр. Пусть остатки от деления на 9 номеров «Мерседеса» и «Жигулей» равны $М$ и $Ж$ соответственно. Рассмотрим два случая.

1) $М \neq Ж$. Почему остатки могут различаться? Запись цифр первого слагаемого в обратном порядке здесь ни при чем: делимость связана лишь с суммой цифр, которая при перестановке цифр не меняется. Значит, дело лишь в той самой пропущенной цифре – именно она вызывает расхождение. Используя признак делимости на 9, можно (зная $М$ и $Ж$) легко определить эту цифру: она равна $(М - Ж)$, если $М > Ж$, или равна $(9 + М - Ж)$, если $М < Ж$. Так что если остатки от деления на 9 номеров автомобилей были бы различны, то второй математик сумел бы однозначно указать пропущенную цифру, а по условию он этого сделать не смог. Значит, этот случай не имел места.

2) $М = Ж$. Совпадение остатков, как явствует из того же признака делимости на 9, возможно, если пропущенная цифра не влияет на остаток от деления на 9. Но таких возможных цифр две: 0 и 9, и теперь понятно, почему второй математик не мог сразу назвать пропущенную цифру. Значит, имел место именно этот случай.

Итак, первый математик пропустил либо ноль, либо девятку. А в конце разговора он добавил, что эта цифра равна номеру дома. Но номер дома не может равняться нулю! Стало быть пропущенная цифра – это 9.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» № 6 за 2005 г.)

11. Расположить монеты в обратном порядке возможно для любого n. Сначала покажем, как можно проделать эту операцию для двух монет. Рассмотрим две произвольные соседние монеты A и B, причем монета A лежит на монете B. Тогда можно переместить их под самый низ столбика, причем монета B будет лежать на монете A. Проделаем это в два приема. Сначала изымем из столбика пару монет A и B, монету A положим на самый верх, а монету B под самый низ. Затем изымем из столбика самую верхнюю монету A и ту монету, на которой она лежит, обозначим ее буквой M. После этого монету M положим на самый верх, а монету A – под самый низ. Результат: пара монет A и B переместились в самый низ, причем монета B оказалась на монете A.

А теперь укажем способ, как расположить все монеты столбика в обратном порядке. Рассмотрим два случая.

1) n – четное число, т.е. $n = 2m$, где m – натуральное. Пронумеруем монеты сверху вниз по порядку: 1, 2, …, $2m$. Затем разобьем их на пары соседних монет: 1 и 2, 3 и 4, …, $2m - 1$ и $2m$. Далее описанным выше способом перемещаем самую нижнюю пару монет: с номерами $2m - 1$ и $2m$. Затем – предыдущую пару: с номерами $2m - 3$ и $2m - 2$. И так далее, вплоть до пары монет номер 1 и 2. Как легко убедиться, получится именно то, что требовалось.

2) n – нечетное число, т.е. $n = 2m + 1$, где m – натуральное. Точно так же пронумеруем монеты сверху вниз и так же разобьем их на пары соседних монет: 1 и 2, 3 и 4, …, $2m - 1$ и $2m$, а последнюю монету с номером $2m + 1$ оставим без пары. Затем проделаем то же, что и в предыдущем случае. При этом все монеты с номерами от 1 до $2m$ расположатся в обратном порядке, а монета с номером $2m + 1$ «переползет» на самый верх, и получится опять-таки именно то, что требовалось.

12. Обозначим $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 n + ds$, где d – разность прогрессии, $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$. Воспользуемся следующими известными фактами:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = s,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = s \cdot \frac{2n-1}{3},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = s^2$$

(их можно обосновать, например, методом математической индукции). Тогда

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = na_1^3 + 3a_1^2 d\left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right) +$$

$$+ 3a_1 d^2\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) + d^3\left(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3\right) =$$

$$= na_1^3 + a_1^2 ds + 2a_1^2 ds + 3a_1 d^2 s \cdot \frac{2n-1}{3} + d^3 s^2 =$$

$$= a_1^2(a_1 n + ds) + s\left(2a_1^2 d + a_1 d^2 (2n-1) + d^3 s\right) =$$

$$= a_1^2(a_1 n + ds) + s\left(d^2(a_1 n + ds) + a_1 d \cdot \frac{2}{n}(a_1 n + ds)\right) =$$

$$= S_1\left(a_1^2 + sd^2 + sa_1 d \cdot \frac{2}{n}\right) = S_1\left(a_1^2 + sd^2 + a_1 d(n-1)\right).$$

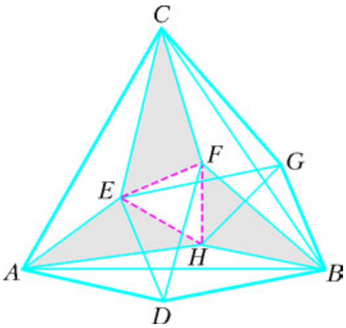


Рис. 2

В общих скобках стоит натуральное число, поэтому S_3 кратно S_1.

13. Так как треугольники ABC и ADE (рис. 2) равносторонние, то $\Delta AEC = \Delta ADB$ и $CE = BD = BF$. Так как треугольники CBA и CGE равносторонние, то $\Delta AEC = \Delta BGC$ и $AE = BG$. Так как треугольники BAC и BHG равносторонние, то $\Delta BGC = \Delta BHA$ и $BG = BH$, $AH = CG = CE$. Так как треугольники BAC и BDF равносторонние, то $\Delta ADB = \Delta CFB$ и $AE = AD = CF$. Отсюда $\Delta AEC = \Delta ADB = \Delta BGC = \Delta BHA = \Delta CFB$, $AE = CF = BH$, $AH = CE = BF$. Поэтому $\Delta AEH = \Delta CFE = \Delta BHF$ и $EF = FH = HE$.

14. Рассмотрим такие четыре числа:

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-3}{4n-2}\cdot\frac{4n+1}{4n+2},$$

$$y = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-2}{4n-1}\cdot\frac{4n+2}{4n+3},$$

$$z = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n}\cdot\frac{4n+3}{4n+4},$$

$$t = \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n}{4n+1}\cdot\frac{4n+4}{4n+5}.$$

Поскольку для любых натуральных чисел n и k, таких что $k > n$, выполняется неравенство $\frac{k}{k+1} > \frac{n}{n+1}$, то $x < y < z < t$. Значит,

$$x^4 < x\cdot y\cdot z\cdot t =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)\cdot(4n+5)} = \frac{1}{4n+5} < t^4.$$

Эти неравенства будут выполняться, если взять, например, натуральное число $n = \frac{2005^4 - 5}{4}$. Очевидно, при таком значении n неравенства из условия задачи также будут выполняться.

15. а) Ответ: 16 полуладей. Пример на рисунке 3 показывает, что такая расстановка возможна (стрелки указывают направления обстрела каждой полуладьи).

Докажем, что больше 16 полуладей расставить невозможно. Допустим, имеется горизонталь, на которой находится не меньше трех ладей. Заметим, что полуладья, стоящая в этой горизонтали *не крайней*, непременно будет угрожать одной из полуладей, стоящих на той же горизонтали. Поэтому на каждой горизонтали может находиться не более двух полуладей, и суммарное число полуладей не превышает $2\times 8 = 16$.

б) Ответ: 14 полуладей. Пример на рисунке 4 показывает, что такая расстановка возможна.

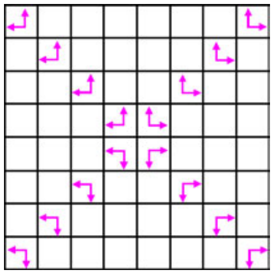


Рис. 3

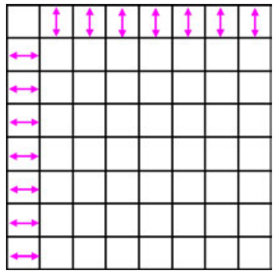


Рис. 4

Докажем, что больше 14 полуладей расставить нельзя. Назовем *горизонтальной полуладьей* такую полуладью, которая обстреливает все поля горизонтали, в которой она находится, и назовем *вертикальной полуладьей* такую полуладью, которая обстреливает все поля вертикали, в которой она находится. В одной горизонтали с горизонтальной полуладьей не может находиться ни одной другой полуладьи. Поэтому на доске имеется не более 8 горизонтальных полуладей. При этом, если горизонтальных полуладей ровно 8, то на доске не может быть ни одной другой полуладьи (так как все горизонтали «заняты»). Таким образом, если мы хотим расставить на доске больше 8 полуладей, то горизонтальных полуладей должно быть не больше 7. Аналогичным образом можно доказать, что если на доске расположено более 8 полуладей, то вертикальных полуладей имеется также не больше 7.

в) Ответ: 10 почти ладей. Пример на рисунке 5 показывает, что такая расстановка возможна.

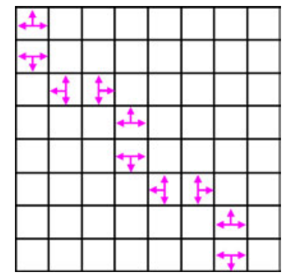


Рис. 5

Докажем, что больше 10 почти ладей расставить невозможно. Для этого рассмотрим поля доски, примыкающие к ее наружной границе. Каждое такое поле – квадрат, по крайней мере одна сторона которого совпадает с наружной границей доски. Назовем такие стороны *наружными отрезками*. Всего на доске, как видно, $8\times 4 = 32$ наружных отрезка.

Пусть на доске расставлено несколько почти ладей так, что каждая из них не угрожает другим почти ладьям. Тогда каждая почти ладья угрожает какому-нибудь наружному отрезку. Кроме того, каждый наружный отрезок может обстреливаться не более чем одной почти ладьей. А так как каждая почти ладья «стреляет» в трех направлениях, то количество почти ладей не может превосходить $\frac{32}{3} = 10{,}666\ldots$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 2)

1. См. рис.6.

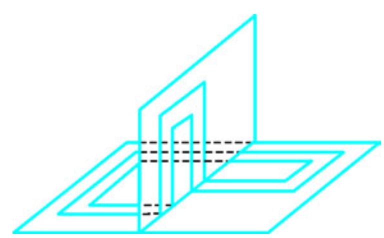


Рис. 6

2. Увеличим номер каждой оставшейся нечетной страницы на 1. Тогда обе страницы на каждом листе имеют одинаковые четные номера и их сумма кратна 4. Значит, сумма всех «новых» номеров оставшихся страниц кратна 4. Поскольку вырвано в 4 раза меньше страниц, чем осталось, то количество оставшихся страниц также делится на 4. Следовательно, мы увеличили сумму номеров страниц на число, кратное 4, а значит, и исходная сумма номеров невырванных страниц кратна 4.

3. *Внимание*: в условии этой задачи допущена опечатка. Первое предложение следует читать так: «В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне – произведение чисел, записанных в ее концах, а внутри треугольника – произведение чисел, записанных в его вершинах».

Обозначим числа, записанные в вершинах, как a, b, c, тогда на сторонах записаны числа ab, bc, ca, а в самом треугольнике – число abc. По условию,

$$a + b + c + ab + bc + ca + abc = 1000.$$

Прибавим по 1 к обеим частям этого равенства и преобразуем левую часть:

$$(1+a)+(b+ab)+(c+ca)+(bc+abc)=$$

$$=(1+a)(1+b+c+bc)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

Поскольку последнее выражение равно $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$, а каждое из чисел a, b, c натуральное, то $a+1$, $b+1$, $c+1$ суть числа 7, 11, 13, взятые в некотором порядке. Поэтому a, b, c – это различные числа из множества {6, 10, 12}.

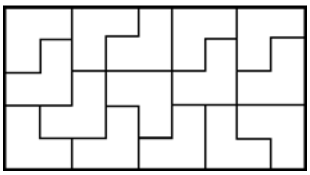


Рис. 7

4. Неверно, см. рис. 7.

5. Пусть тумба находится в точке T, а лев движется вдоль ломаной $TABC$ (рис. 8). Продолжим AT до пересечения с окружностью в точке D. Хорды AD и BC симметричны относительно центра окружности. Следовательно, независимо от начального положения точки T, лев пройдет через точку M, симметричную точке T относительно центра окружности.

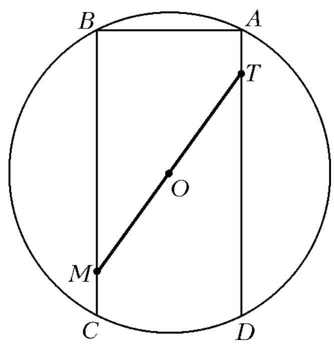


Рис. 8

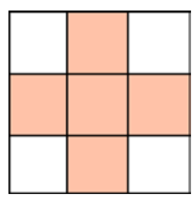


Рис. 9

6. Докажем, что не удастся сделать числа в клетках таблицы положительными и равными. Предположим, что это не так – пусть все числа в таблице оказались равными положительному числу a. Тогда было сделано $3a$ ходов. Рассмотрим крест из пяти клеток (рис.9). Любой уголок занимает не менее двух клеток креста и не более одной клетки вне креста. Следовательно, при увеличении трех чисел на 1 сумма чисел в клетках креста увеличивается по крайней мере на 1 больше, чем сумма чисел в остальных клетках. Значит, после $3a$ ходов сумма чисел в клетках креста будет отличаться от суммы чисел в остальных клетках не менее чем на $3a$, а должна отличаться на $5a - 4a = a$.

7. Да, верно. Если в данном треугольнике есть сторона целой длины, то разрезать можно, например, так, как показано на рисунке 10,*а*.

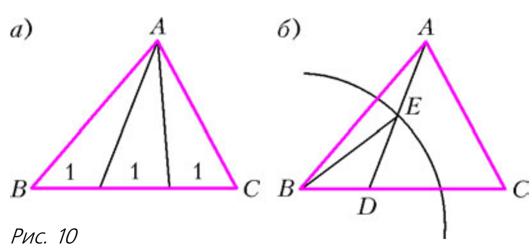


Рис. 10

Пусть таких сторон нет, и в данном треугольнике ABC сторона $AB > 1$. Отметим на стороне BC такую точку D, чтобы длина DC была целой, а $BD < 1$ (если $BC < 1$, то будем считать, что D совпадает с C). Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке B (рис.10,*б*). Так как точка D лежит внутри окружности, а точка A – вне ее, то окружность пересечет отрезок AD в некоторой точке E. Таким образом получим треугольники ABE и BED со стороной $BE = 1$ и, быть может, треугольник ADC с целой стороной DC, к которому применимы предыдущие рассуждения.

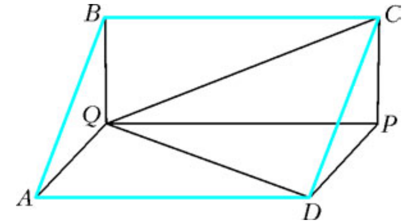


Рис. 11

8. Построим треугольник CPD, равный треугольнику BQA, как показано на рисунке 11. Тогда $AQ = DP$, $AQ \parallel DP$, следовательно, $AQPD$ – параллелограмм. Так как $\angle DQP = \angle ADQ = \angle ABQ = \angle DCP$, то четырехугольник $QCPD$ – вписанный. Следовательно,

$$CPD + \angle CQD = \angle BQA + \angle CQD = 180°.$$

9. Заметим, что делителями числа $2n$ являются все делители числа n, а также все вдвое большие их числа. Для нечетных n эти два множества делителей не пересекаются, т.е. $S(2n) = S(n) + 2S(n) = 3S(n)$. Если же n четно, то эти множества пересекаются, например по числу 2 (оно является одновременно делителем числа n и делителем числа $2n$). Следовательно, $S(2n) < S(n) + 2S(n)$. Таким образом, равенство выполняется только при нечетном n.

10. Выберем произвольное простое число p, большее 1001. Докажем, что выигрышным является либо число p, либо число $p - 1$. Если для $n = p - 1$ первый игрок имеет выигрышную стратегию, то задача решена. В противном случае выигрышную стратегию имеет второй игрок. В этом случае выберем $n = p$. Первым ходом первый игрок вычеркивает одно число p и оставляет второму игроку проигрышную позицию – числа от 1 до $p - 1$. Следовательно, первый игрок имеет выигрышную стратегию.

11. Очевидно, что из каждого квадратика 2×2 можно вырезать по уголку. На рисунке 12 приведен пример многоугольника, из которого нельзя вырезать больше. Докажем это. Будем говорить, что уголок принадлежит квадрату, если в этом квадрате лежат две из его трех клеток. Заметим, что ни одному квадрату не может принадлежать более одного уголка. Таким образом, уголков не больше, чем квадратов. Поэтому, из многоугольника гарантированно можно вырезать 30 уголков.

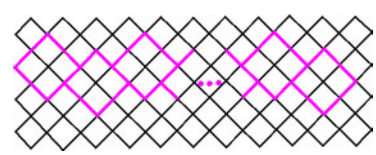


Рис. 12

12. Заметим, что

$$2\left(x^2+y^2\right)-(x+y)^2=(x-y)^2\ge 0,$$

поэтому

$$2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2\ge 1\cdot(x+y).$$

13. Пусть стороны коврика были равны n и kn, а его площадь равнялась kn^2. После перекраивания бóльшая сторона стала равной $kn + p$, значит, меньшая стала равной $\dfrac{kn^2}{kn+p}$. Поскольку это тоже целое число, то kn^2 делится на $kn + p$. Так как $n(kn+p) = kn^2 + np$, то и np делится на $kn + p$. Поэтому $kn + p$ равно некоторому делителю d числа n, возможно, умноженному на p. Так как kn делится на d, то и p делится на d, т.е. d равно 1 или p, а $kn + p$ равно 1, p или p^2. Но $kn + p$ больше p и поэтому равно p^2. Итак, длина Петиного коврика стала равной p^2.

14. Ему это сделать не удастся. Имеем: $\overline{МЯУМЯУ} = 1001\cdot\overline{МЯУ}$. Так как $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ – число, в каноническом разложении которого нет квадратов простых чисел, то a^2 должно делиться на $1001^2 > 1000000 > \overline{МЯУМЯУ}$. Противоречие.

15. а) Полный квадрат с двумя или более одинаковыми последними цифрами может оканчиваться только на 44 или 00. Таким образом, $z = 4$, поэтому $x^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n}\left(10^n \cdot y + 4\right)$. Пусть $n \geq 4$. Разделим полученное равенство на 4: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n} \cdot \left(25 \cdot 10^{n-2} \cdot y + 1\right)$. Правая часть при делении на 4 дает остаток 3, но не существует целого числа, квадрат которого при делении на 4 давал бы остаток 3. В этом случае решений нет.

Если $n = 3$, то $x^2 = 111(1000y + 4)$. Поскольку $111 = 3 \cdot 37$, а слева стоит полный квадрат, то необходимо, чтобы $1000y + 4$ делилось на 111. Отсюда следует, что $y + 4$ делится на 111, а это невозможно, поскольку y – цифра. Итак, в этом случае решений тоже нет.

Если $n = 2$, то $x^2 = 11(100y + 4)$. Число $100y + 4$ делится на 11, откуда $y = 7$, тогда $x = \pm 88$.

б) Значение t равно 0 или 4 (см. п. а)). Пусть $t = 0$, тогда $u^2 = \overline{yyzz}$, где $u = \frac{x}{10}$. Применяя те же рассуждения, что и в п. а), в этом случае получаем ответ $(x, y, z, t) = (\pm 880, 7, 4, 0)$. Пусть $t = 4$, тогда $x^2 = 11\left(y \cdot 10^4 + z \cdot 10^2 + 4\right)$. Так как число в скобках делится на 11, то и $y + z + 4$ делится на 11. Отсюда либо $y + z + 4 = 22$, либо $y + z + 4 = 11$. В первом случае $y = z = 9$, $x^2 = 999944$. Но $x^2 \leq (1000 - 1)^2 < 999944$ – противоречие. Во втором случае, заметив, что выражение $y \cdot 10^4 + z \cdot 10^2 + 4$ делится на 11, поделим обе части равенства $x^2 = 11\left(y \cdot 10^4 + z \cdot 10^2 + 4\right)$ на 121. Обозначив $u = \frac{x}{11}$ и учитывая, что $z = 7 - y$, получим $u^2 = 900y + 64$. Несложно проверить, что не существует цифр $y \neq 0$ и натуральных u, удовлетворяющих этому равенству.

16. Да, существуют. Заметим, что сумма натуральных чисел от 1 до n равна треугольному числу $\frac{n(n+1)}{2}$. Также равна треугольному числу и сумма чисел от 1 до $n + 1$. Выберем n так, чтобы $n + 1$ было достаточно большим треугольным числом, например $n + 1 = \frac{10^{100}\left(10^{100} + 1\right)}{2}$. Тогда искомыми треугольными числами будут числа $\frac{n(n+1)}{2}$ и $n + 1$.

17. Для любых n. Возьмем, например, числа вида 10^k, где $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

18. а) Если $k = 0$, то связанными являются *соседние* лампочки. Наибольшее количество лампочек, которые можно зажечь таким способом, равно $n - 2$. Покажем, что большее количество лампочек зажечь не удастся. Предположим, что это не так. Зафиксируем *первый* момент, когда удалось зажечь $n - 1$ лампочку. Обозначим последнюю не горящую лампочку через A. Ясно, что в этом случае лампочка B, которая зажглась последней, соседствует с A, потому что все остальные имеют по два горящих соседа. Пусть, для определенности, B находится справа от A. Когда она зажигалась, должна была погаснуть именно лампочка A, иначе должна была погаснуть лампочка справа от B, а она горит. Но это означает, что перед включением лампочки B горела $n - 1$ лампочка, что противоречит выбору первого момента.

Покажем, как зажечь $n - 2$ лампочки. Пусть лампочки с номерами $1, 2, \ldots, k$ уже горят. Зажигаем лампочку $k + 2$ (при этом ни одна из лампочек не погаснет). Далее зажигаем лампочку $k + 1$, а лампочку $k + 2$ гасим. После этих двух операций получаем цепочку $1, 2, \ldots, k + 1$, состоящую из горящих лампочек. Эту процедуру можно продолжать, пока не будут зажжены лампочки с номерами $1, 2, \ldots, n - 2$.

б) Решим задачу в общем случае для гирлянды из n лампочек. Нам будет удобно нумеровать лампочки с нуля: $0, 1, \ldots, n - 1$. Будем двигаться вправо от нулевой лампочки по связанным с ней. Мы отметим лампочки с номерами, кратными 12: 0, 12, 24, … Зафиксируем момент, когда *впервые* снова попадем в лампочку с номером 0. Выясним, сколько шагов нам для этого потребуется. С одной стороны, мы идем шагами длиной 12, с другой стороны, мы сделали целое число оборотов по n. Ясно, что первый раз это случится, когда мы пройдем расстояние $\text{НОК}(12, n)$. При этом будет отмечено $m = \frac{\text{НОК}(12, n)}{12}$ лампочек. Поскольку

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)},$$

то

$$m = \frac{12n}{\text{НОД}(12, n) \cdot 12} = \frac{n}{\text{НОД}(12, n)}.$$

Если в гирлянде остались неотмеченные лампочки, то берем любую из них и аналогично получаем другую цепочку. Эта цепочка не пересечется с первой и в ней тоже будет m лампочек. Продолжим процесс разделения на цепочки, пока все лампочки не будут исчерпаны. Всего цепочек будет $\frac{n}{m} = \text{НОД}(12, n)$.

Поскольку лампочки в разных цепочках никак не могут повлиять друг на друга, а в одной цепочке связанные лампочки становятся как бы соседними, то воспользуемся результатом задачи п. а): в каждой цепочке длины m можно зажечь максимум $m - 2$ лампочки. В итоге во всех цепочках можно зажечь максимум $\frac{n}{m}(m - 2) = n - 2\text{НОД}(12, n)$ лампочек. Перебрав значения n = 100, 99, 98, 97, получаем, что при $n = 97$ можно зажечь наибольшее количество – 95 лампочек (при $n \leq 96$ количество горящих лампочек заведомо не больше $n - 2 < 95$).

19. Решим задачу в общем случае, когда в $(n + m)$-этажном доме при нажатии одной кнопки лифт поднимается на m этажей вверх, а при нажатии другой – опускается на n этажей вниз. Покажем, что в этом случае наименьшее количество нажатий кнопок равно $\frac{m+n}{\text{НОД}(m, n)}$. Действительно, пронумеруем этажи от 0 до $n + m - 1$ и расположим их на окружности, т.е. будем считать, что вслед за $(n + m - 1)$-м этажом по кругу расположен 0-й этаж, и т.д. Заметим, что поездка на n этажей «вниз» по такому кольцу – это все равно, что поездка на m этажей «вверх». Поэтому можно считать, что мы движемся все время в одном направлении шагами длины m. Применяя в точности те же рассуждения, что и при решении задачи 18, б), и учитывая, что $\text{НОД}(m + n, m) = \text{НОД}(m, n)$, получаем требуемый результат. Применительно к данным задачи отсюда следует ответ: $\frac{79 + 21}{\text{НОД}(79, 21)} = 100$.

20. а) Упорядочим стороны треугольника: $a \geq b \geq c$. На рисунке 13,*а* показано разбиение для случая $a = b$, на рисунке 13,*б* – для случая $a > b$.

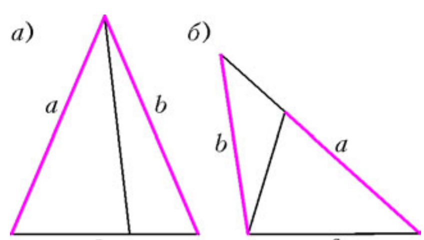


Рис. 13

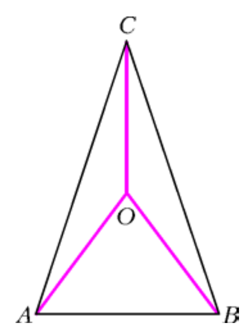


Рис. 14

б) Упорядочим углы треугольника: $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$.
Пусть $\angle A = \angle B$. Тогда треугольник остроугольный, и центр O описанной окружности лежит внутри него. Разрез можно осуществить по трем радиусам описанной окружности, показанным на рисунке 14.
Пусть $\angle A > \angle B$. Рассмотрим трехзвенную ломаную $BDEA'$ с равными звеньями и проведем из точки A' прямую $A'C'$, параллельную прямой AC (рис.15,*а*). Так как $\angle A > \angle B$, то отрезок $A'C'$ не пересечет отрезок ED.

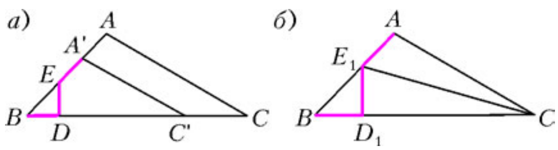


Рис. 15

С помощью гомотетии переведем треугольник $BA'C'$ в треугольник BAC (рис.15,*б*). При этом преобразовании ломаная $BDEA'$ перейдет в ломаную BD_1E_1A . Она разбивает треугольник BAC на три треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

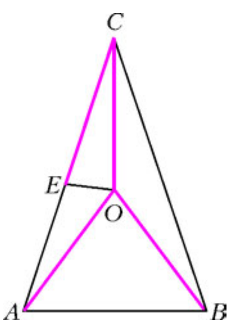


Рис. 16

в) Решение повторяет рассуждения п. б). Для упорядоченных углов $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$ в случае $\angle A = \angle B$ разрез можно осуществить по трем радиусам описанной окружности, показанным на рисунке 16, а также по отрезку OE ($CE = OC$).
В случае $\angle A > \angle B$ к построениям п. б) добавляется построение отрезка $CF = BD_1$ (рис.17). Такой отрезок построить возможно, поскольку $CF < AB \leq AC$. Покажем, что прямая CF непараллельна E_1D_1 . Предположив противное, получим $\angle D_1E_1B = \angle CAB$, но треугольник E_1D_1B равнобедренный с основанием BE_1 , отсюда $\angle B = \angle D_1E_1B = \angle CAB = \angle A$, что противоречит предположению $\angle A > \angle B$.

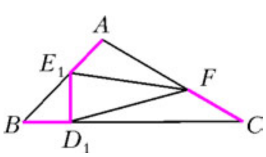


Рис. 17

21. Заметим, что если в числе больше 10 цифр, то в нем обязательно имеются повторяющиеся цифры и, согласно условию, следующее число будет меньше его. Поэтому в последовательности существует лишь конечное число членов, в которых количество цифр больше 10. Отбросим их, потому что они не влияют на периодичность. С другой стороны, все числа последовательности, очевидно, положительны. По принципу Дирихле в бесконечной ограниченной последовательности обязательно найдутся два одинаковых числа. Поскольку каждый член последовательности определяется только предыдущим членом, то с момента первого повторения числа в дальнейшем последовательность чисел начнет периодически повторяться.

КАПРИЗНЫЕ ЧИСЛА

Парадокс Арно. Утверждение о соотношении величин числителя и знаменателя нельзя распространять на неотрицательные числа.

Парадокс Валлиса. Неравенство $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ нельзя распространять на все целые числа n.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Можно, если палочку снабдить ручкой из изолятора.
2. На пленке в процессе ее изготовления или во время разматывания рулона возникает статический заряд. В присутствии же влаги заряд с пленки «стекает».
3. Пламя зажженной свечи, помещенной между пластинами, отклонится к отрицательно заряженной пластине, так как частицы сажи в пламени заряжены положительно.
4. Сила взаимодействия увеличится за счет зарядов, индуцированных на шарике.
5. Только часть силовых линий, исходящих из заряда $+q$, заканчиваются на индуцированных зарядах проводника.
6. Нет, не зарядится.
7. В случае разноименных зарядов.
8. Напряженность поля увеличится, потенциал уменьшится.

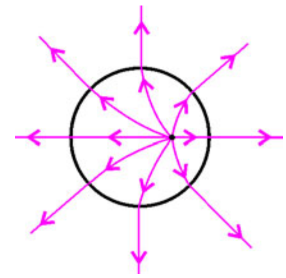


Рис. 18

9. Нет, поскольку напряженность электрического поля останется ниже пробойного значения.
10. См. рис.18.
11. Нет, так как система заряд–человек изолирована от земли.
12. Нулю.
13. На остриях образуется настолько большая плотность зарядов, что окружающий воздух ионизируется, и заряды «стекают» с острия.
14. Нет, у большего шара будет больший потенциал.
15. При заземлении тела опадут листочки обоих электроскопов (так как они регистрируют разность потенциалов между телом и землей) – рисунок неверен.
16. Бóльшая работа совершается во втором случае. Энергия конденсатора в первом случае уменьшается, во втором – увеличивается.
17. Напряженность поля увеличится, так как поверхностная плотность заряда на металлической пластине напротив диэлектрика возрастет.
18. Энергия увеличится: а) в k раз; б) в n^2 раз.

Микроопыт

Укрепив нейтральные шары на изолирующих подставках, надо привести их в соприкосновение и поместить в поле заряженного шара, а затем разнять их. Шар, более близкий к заряженному шару, приобретет отрицательный заряд, а более дальний – положительный.

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. $E = \dfrac{\mathcal{E}}{d + \varepsilon(d-h)} = 2{,}6 \cdot 10^3$ В/м .

2. $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathcal{E}}{d}$.

3. $x = \dfrac{d}{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S \mathcal{E}^2}{2Ad} - \varepsilon}$.

4. $F = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2}\left(\dfrac{\varepsilon U}{l_1 + \varepsilon l_2}\right)^2$; при $l_2 \to 0$ $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S U^2}{2 l_1^2}$.

XIV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Нет, ибо

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \times 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 .$$

2. $90°$. *Указание*. Точка M лежит на окружности с центром B и радиусом AB.

3. $x = y = 2$. *Указание*. Ясно, что $x \ge 1$, $y \ge 1$. Поскольку $\sqrt{x-1} \ge \frac{x}{2}$ и $\sqrt{y-1} \ge \frac{y}{2}$, имеем $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \ge xy$, причем равенство возможно лишь при $\sqrt{y-1} = \frac{y}{2}$ и $\sqrt{x-1} = \frac{x}{2}$.

4. а) Можно; б) нельзя. *Указание*. Так как 1 + 2 + 3 +… …+ 30 = 465, то на 6 групп с одинаковыми суммами числа разбить нельзя, а на 5 можно. Для этого каждую из трех групп 1, 2, …, 10; 11, 12, …, 20; 21, 22, …, 30 разбиваем на 5 пар с одинаковыми суммами, а затем полученные пары объединяем в 5 групп по 6 чисел в каждой.

5. $\frac{l^2}{h}$. *Указание*. Пусть прямая AL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Центр O этой окружности лежит на прямой MN, а четырехугольник $NMAH$ – параллелограмм ($NM \parallel AH$ и $NM = AH$, так как $ML = LH$ по условию). Точка L – середина AN. Поэтому $OL \perp AN$. В прямоугольном треугольнике OLN гипотенуза $ON = R$, катет $NL = l$, а $NM = h$ – его проекция на ON. Поэтому $l^2 = Rh$.

6. 2. *Указание*.

$$3\alpha^2 - 4\alpha = 3\alpha^2 - 3\alpha - \alpha = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 - \alpha^3 = (1-\alpha)^3 .$$

Аналогично преобразуйте и второе подкоренное выражение.

7. Нет. Пусть на плоскости даны N точек, D – наибольшее, а d – наименьшее из расстояний между ними. Возьмем любую из данных точек и построим круг с центром в этой точке. Все остальные точки окажутся внутри или на границе этого круга. Теперь рассмотрим круги радиусом $\frac{d}{2}$ с центрами во всех данных точках. Эти круги не перекрываются, и их суммарная площадь равна $\frac{\pi N d^2}{4}$. С другой стороны, все эти круги целиком содержатся в круге радиусом $D + \frac{d}{2}$, поэтому $\frac{\pi N d^2}{4} < \pi\left(D + \frac{d}{2}\right)^2$. Следовательно,

$$\frac{d\sqrt{N}}{2} < D + \frac{d}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{D}{d} > \frac{\sqrt{N}-1}{2} .$$

Однако при $N = 225$, $D \le 21$ и $d \ge 3$ полученное неравенство не выполняется.

Физика

1. Запишем законы сохранения энергии и импульса для бруска с грузом:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}, \quad mv_0 = mv_1 + Mv_2,$$

где v_1 и v_2 – скорости груза и бруска в момент времени, когда груз находится в верхней точке. Если груз совершает полный оборот вокруг точки подвеса, то нить натянута во всех точках траектории. При минимальной начальной скорости натяжение в верхней точке обращается в ноль. Второй закон Ньютона в этой точке запишем в системе отсчета, связанной с бруском:

$$mg = \frac{m(v_1 - v_2)^2}{l},$$

так как именно в этой системе отсчета радиус кривизны траектории груза равен длине нити l. В системе отсчета, связанной с землей, точка подвеса нити перемещается вместе с тележкой, и груз движется по сложной траектории. Отметим, что в рассматриваемый момент времени ускорение тележки равно нулю, т.е. связанная с ней система отсчета является инерциальной (сила инерции обращается в ноль). Выполнив преобразования (выразив v_1 и v_2 из второго и третьего уравнений и подставив их в первое) получим

$$v_0 = \sqrt{\left(5 + 4\frac{m}{M}\right)gl} .$$

Замечание. Если вы знакомы с важным свойством системы центра масс двух материальных точек, утверждающим, что кинетическая энергия системы в этой системе отсчета выражается через относительную скорость точек по формуле

$$E_к = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2}$$

(это утверждение несложно проверить «в лоб»), то можно решать эту задачу в системе центра масс:

$$\frac{mM}{m+M}\frac{v_0^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mM}{m+M}\frac{v_{отн}^2}{2}, \quad mg = m\frac{v_{отн}^2}{l}.$$

2. Так как все точки облака движутся к центру не опережая друг друга, то частица, находившаяся изначально на расстоянии r от центра, все время притягивается к массе $M = 4\pi\rho r^3/3$. Найдем время падения частицы с расстояния r на центр (конечное расстояние до центра пренебрежимо мало по сравнению с начальным, так как плотность возрастает на много порядков). Заменим движение по прямой движением по очень узкому эллипсу с большой осью r. В соответствии с третьим законом Кеплера, период движения по такому эллипсу равен периоду движения по окружности радиусом $r/2$, который найдем из второго закона Ньютона:

$$G\frac{mM}{(r/2)^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (r/2) .$$

Выразив массу M через начальную плотность облака, найдем время падения на центр:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{8G\rho}} \approx 10^6 \text{ лет.}$$

Обращаем внимание на то, что ответ не зависит от начального положения частицы в облаке.

3. В системе отсчета, связанной с серединой нити, на каждый из грузов действует сила инерции $\vec{F} = -m\vec{a}$, эквивалентная силе тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}' = \vec{a}$. Записав для движения в этом поле закон сохранения энергии: $2ma\frac{l}{2} = Q$, найдем выделившееся количество теплоты: $Q = mal$.

Замечание. Утверждение о силе инерции следует из закона сложения ускорений:

$$\vec{T} = m(\vec{a} + \vec{a}_{отн}), \quad \text{откуда} \quad \vec{T} + (-m\vec{a}) = m\vec{a}_{отн} .$$

4. Насыщенный пар находится в состоянии динамического равновесия с жидкостью, т.е. число «прилипших» молекул равно числу испарившихся. Разумно предположить, что процесс испарения не зависит от наличия пара над поверхностью, а определяется только температурой жидкости. Тогда масса жидкости, испарившейся за время t с поверхности жидкости площадью S, равна

$$m_{прил} = m_{исп} = \rho_в S\frac{\Delta h}{\Delta t}t ,$$

где $\Delta h/\Delta t$ – скорость понижения уровня в условиях низкой влажности. Для оценки массы молекул насыщенного пара, упавших за это же время на поверхность, предположим, что $1/6$ часть молекул летит в сторону жидкости и что все молекулы имеют одинаковую среднюю скорость v. За время t поверхности достигнет $1/6$ массы пара, находящегося в цилиндре объемом Svt:

$$m_{пад} = \frac{1}{6}\rho_п Svt .$$

Для оценки средней скорости возьмем значение средней квадратичной скорости: $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, а плотность пара выразим через давление: $\rho_п = \frac{pM}{RT}$. Подставляя численные значения, получим $\frac{m_{прил}}{m_{пад}} = \frac{6\rho_в}{\rho_п v}\frac{\Delta h}{\Delta t} = 6\frac{\rho_в}{p}\frac{\Delta h}{\Delta t}\sqrt{\frac{RT}{3M}} \approx 0{,}02$.

5. Теплоемкость газа тем выше, чем ближе процесс к изотермическому. Поскольку молярная теплоемкость в данном процессе во много раз (почти на три порядка) больше R, сделаем оценку полученного количества теплоты, считая T = const. Получим

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V}\,dV = RT\ln\frac{V_2}{V_1} \approx 4000 \text{ Дж}.$$

Изменение температуры равно

$$\Delta T = \frac{Q}{C} \approx 0{,}8 \text{ К}.$$

При таком ΔT изменение внутренней энергии, которым мы пренебрегли при расчете тепла, составляет 10–20 Дж (в зависимости от типа газа), т.е. вносит поправку всего лишь в доли процента.

6. Запишем условие равновесия шариков после нанесения на них зарядов:

$$k(3l - l) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(3l)^2}.$$

При изменении расстояния между шариками на малую величину x (от $3l$ до $3l + x$) сила взаимодействия изменится на

$$\Delta F = \Delta F_{упр} + \Delta F_{эл} = -kx + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{(3l+x)^2} - \frac{q^2}{(3l)^2}\right) \approx$$

$$\approx -kx - \frac{q^2\cdot 6lx}{4\pi\varepsilon_0(3l)^4} = -kx - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(3l)^2}\frac{2}{3}\frac{x}{l} = -kx - \frac{4}{3}kx = -\frac{7}{3}kx$$

(при упрощении использована первая формула). Возникающая при малом смещении из положения равновесия возвращающая сила эквивалентна силе упругости пружины с жесткостью $\frac{7}{3}k$. Следовательно, частота колебаний возрастет в $\sqrt{\frac{7}{3}}$ раз.

7. Проволочка предохранителя перегорает при достижении температуры плавления. Предположим, что нагревание происходит достаточно медленно, т.е. в каждый момент времени мощность выделенного током тепла равна мощности отдачи тепла в окружающую среду, которая пропорциональна разности температур и площади поверхности:

$$\frac{U^2}{R} = \alpha(T_{пл} - T)S,\quad U = \sqrt{\rho\frac{l}{\pi d^2/4}\alpha(T_{пл} - T)\pi l d}.$$

Отсюда

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12,\quad U_2 = 636 \text{ В}.$$

Устный командный тур

Математика

1. Доля голубоглазых среди блондинов больше.

2. Это основание высоты, опущенной на гипотенузу.

3. Можно: $3a^4 + 1 = (a^2 - a)^2 + (a^2 + a)^2 + (a^2 - 1)^2$.

4. $90°$. *Указание*. Точка D – ортоцентр треугольника ABC.

5. 5. *Указание*. Пусть m – возраст младшего. Докажите, что одно из чисел m, $m + 2$, $m + 6$, $m + 8$, $m + 12$ и $m + 14$ делится на 5.

6. Да. Это вершины правильного пятиугольника и его центр.

7. $\sqrt{41}$. *Указание*. Так как

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-7)^2 + 3^2},$$

данная функция равна сумме расстояний от точки $(x; 0)$ до точек $(3; 2)$ и $(7; 3)$ соответственно. Наименьшее значение этой суммы равно расстоянию от точки $(3; -2)$ до точки $(7; 3)$.

8. 3. Пусть a – первая цифра десятичных записей чисел 2^n и 5^n. Тогда

$$a\cdot 10^k < 2^n < (a+1)\cdot 10^k,\quad a\cdot 10^l < 5^n < (a+1)\cdot 10^l.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$a^2\cdot 10^{k+l} < 10^n < (a+1)^2\cdot 10^{k+l},\ \text{ т.е. }\ a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2.$$

Поскольку a – цифра, это возможно лишь при $a = 3$, $n - k - l = 1$.

9. 12.

10. $\frac{a+b}{2}$. *Указание*. Пусть M и N – середины сторон AB и DC соответственно. Четырехугольник $KMEN$ – параллелограмм, площадь которого равна $\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Треугольники KAE и KNE, а также KME и KDE равновелики. Поэтому $AB \parallel EK \parallel CD$.

11. 50 мин. *Указание*. Человек встретил машину за 10 минут до прибытия поезда, на котором он обычно приезжал.

12. 2 решения. Очевидно решение $x = y = z = 0$. Далее, пусть $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$ и (для определенности) $x \le y \le z < 0$. Тогда $x^2 \ge y^2 \ge z^2$ и $x^4 \ge y^4 \ge z^4$. При этом $x + y^2 + z^4 \le z + x^2 + y^4 = 0$.

Поэтому если не все числа x, y, z равны между собой, то $x + y^2 + z^4 < 0$. Итак,

$$x = y = z < 0.$$

Уравнение же

$$x^4 + x^2 + x = 0,\quad \text{т.е. (при } x \ne 0\text{) } x^3 + x + 1 = 0,$$

имеет единственный отрицательный корень.

Физика

1. Надо определить, на какой максимальной высоте h (отсчитывая от основания) следует приложить к бруску горизонтальную силу, перпендикулярную боковой грани, чтобы брусок скользил, а не опрокидывался. Тогда $\mu = a/(2h)$, где a – длина ребра, параллельного приложенной силе.

2. Описанное положение неустойчиво по отношению к повороту. Конькобежца развернет, и он поедет пятками вперед.

3. Уровень воды будет выше в лодке (с учетом толщины бортов площадь внешнего сечения больше, чем внутреннего).

4. Скорость нарастания объема постоянна:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\pi R^2\frac{\Delta R}{\Delta t} = \text{const}.$$

Объем должен увеличиться в 8 раз, что произойдет через 7 месяцев.

5. При увеличении температуры стенок давление возрастет, так как средняя скорость молекул после удара о стенку станет больше, и переданный импульс увеличится.

6. Давление пара при 100 °С равно 1 атм, и полное давление внутри трубки будет больше внешнего на величину давления воздуха в трубке. Уровень воды в трубке всегда будет ниже.

7. Надо тяжелым предметом резко ударить по внутренней поверхности кольца в горизонтальном направлении. При ударе кольцо будет деформироваться так, что его вертикальный размер уменьшится, и оно вылетит, не успев сообщить цилиндру горизонтальный импульс.

8. Можно. Первый шаг: взять часть холодной воды, например половину, и привести ее в тепловой контакт с горячей водой (без перемешивания). Второй шаг: привести горячую воду в тепловой контакт со второй половиной холодной воды. Третий шаг: смешать две половины холодной воды.

9. Период не изменится, поскольку кулоновская сила направлена вдоль нити и не дает вклада в возвращающую силу.

10. Поскольку предельный угол полного внутреннего отражения меньше 45°, вошедшие через верхнюю грань лучи не выйдут через боковую поверхность, и паук не увидит муху.

История научных идей и открытий

Математика

1. Например: Паскаль, Декарт, Ферма, Валлис, Грегори, Броункер. С некоторой натяжкой Ньютон и Лейбниц.

2. Нет, ибо

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 =$$
$$= \left(x^2 - x\sqrt2+1\right)\left(x^2+x\sqrt2+1\right).$$

3. $\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5$.

4. Доказательство легко следует из рисунка 19.

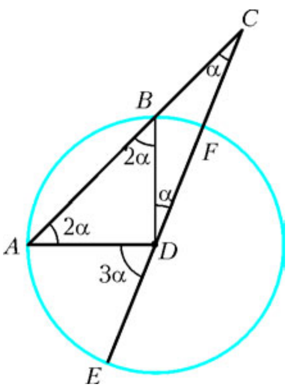


Рис. 19

5. $\frac{\pi^2}{8}$. Пусть

$$S = 1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots$$

Тогда

$$\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots = S+\frac14\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

Отсюда $S = \frac{\pi^2}{8}$.

Физика

1. 1) Эфир. 2) Сиять, сияние. 3) Аристотель, IV век до н.э. 4) «Пятая сущность»; поскольку Аристотель добавил ее к четырем ранее принятым элементам мира: огонь, вода, воздух, земля. 5) А.Эйнштейн, 1905 год (СТО отменила эфир за ненадобностью).

2. 1) III век до н.э. 2) Эратосфен. 3) Арабская Республика Египет. 4) Высота отвесного шеста, врытого в землю, величина тени от шеста, время измерений в Александрии и Асуане; линейка и часы. 5) Базовое расстояние от Александрии до Асуана.

3. 1) Альберт Эйнштейн. 2) Точные угловые координаты положения звезд около солнечного диска, закрытого Луной. 3) Измерения подтвердили величину отклонения лучей света полем тяготения Солнца, предсказываемую ОТО. 4) Аномальная прецессия орбиты Меркурия (бóльшая величина прецессии по сравнению с предсказываемой ньютоновской теорией тяготения) и красное смещение спектров, испущенных массивными небесными объектами, добавочное к доплеровскому смещению. 5) ОТО имеет научно-познавательное значение, а также используется для точности расчетов движения спутников и ракет в околоземном пространстве.

4. 1) Энрико Ферми, 1934 год, Нобелевская премия 1938 года. 2) Отто Ган и Фриц Штрассман, 1938 год, О.Ган – Нобелевская премия по химии 1944 года. 3) США, Чикаго, 1942 год. 4) СССР, Обнинск, 1954 год. 5) Франция.

5. 1) Нильс Бор. 2) Копенгаген (Дания), Мальме и Стокгольм (Швеция), Северная Шотландия, Лондон (Англия), Нью-Йорк и Лос-Аламос (США). 3) Октябрь-декабрь 1943 года. 4) Бегство из Дании, захваченной Гитлером, и необходимость помочь созданию ядерного оружия в США. 5) Квантовая теория атома водорода (1913 г.); теория электронных оболочек и первое приближенное обоснование периодической системы элементов (1923 г.); принцип дополнительности (1927 г.); первая теория атомного ядра (1936 г.); первая теория деления ядер (1939 г.).

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. $l = 2R\arcsin\left(\frac{\sin 1}{\sqrt2}\right)$. **2.** $E_{k\max} = \frac{m_0u^2}{4\exp 2}$.

3. $v_x = \frac{Lv}{3\pi R}$, где $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ – скорость космического корабля на орбите.

4. $a = \frac{g}{2} - \frac{f}{7}\frac{1+2\left(mg/(2f)-1\right)}{m}$, где m – масса шара.

5. $v = v_0 + \frac{RT_0}{2Mv_0}$. **6.** $A_3 = A_1 + A_2 + q\varphi_3$.

7. $R_{AB} = R_0\frac{\sqrt{2+\alpha^2}-(2-\alpha)}{2\alpha}$. **8.** $l = \frac{2LI_0}{R^2b}$. **9.** $I = 8I_0$.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Н.А.Суворова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru

Счастливые часоВ НЕ НАБЛЮДАЮТ

Заканчиваем рассказ об истории шахматных часов.

В 90-е годы прошлого века было отменено откладывание партий и, соответственно, доигрывание. Дело в том, что сила компьютеров достигла гроссмейстерской и они стали активно вмешиваться в анализ. С тех пор игра идет в один присест, результат определяется в тот же день. В крупных турнирах по классическим шахматам после первого контроля (2,5 часа на 40 ходов) соперникам добавляется еще 1 час до конца игры, т.е. партия может длиться 7 часов. Другой вариант – 2 часа на 40 ходов, затем 1 час на 20 ходов и далее полчаса до конца, опять получается 7 часов на партию. Такой семичасовой контроль тоже называется классическим, и, скажем, Владимир Крамник является чемпионом мира по классическим шахматам.

Вместе с изобретением шахматных часов и введением контроля времени родилось и понятие цейтнота, означающее его недостаток; оно давно вошло в обиход. Очевидно, что цейтнот – злейший враг шахматной эстетики, из-за него многие красивые комбинации не доводятся до логического конца, рушатся превосходные замыслы.

Всех шахматистов можно условно разделить на две группы. Одну составляют те, кто играет очень быстро и практически никогда не попадает в цейтнот. Именно к ним относятся слова, вынесенные в заголовок статьи. А ко второй группе относятся игроки, которым хронически не хватает времени и флажок на их часах висит чуть ли не в каждой партии независимо от течения борьбы. Таких шахматистов называют цейтнотчиками. Самым известным цейтнотчиком был американский вундеркинд, претендент на шахматную корону Сэмюэль Решевский. При этом он – рекордсмен по числу благоприятных исходов цейтнотных ситуаций: за свою 70-летнюю карьеру он просрочил время всего семь раз.

Автор этой статьи оказался свидетелем последнего цейтнота Решевского. В 1991 году в Центральном шахматном клубе состоялся дружеский матч по быстрым шахматам из четырех партий между 80-летним Решевским и 70-летним Смысловым. При счете 2:1 в пользу экс-чемпиона решающая встреча заканчивалась на висячем флажке американца, и все-таки он сумел взять верх и сравнять счет.

Смыслов – Решевский

Москва, 1991

35...g5!? Цейтнотная неточность, после 35...♖g8 у черных преимущество двух слонов и явный перевес. **36. ♘e6 g4+ 37. ♔e3 ♖e8 38. ♘:c5 f5! 39. ♖f2 ♖f7?** К цели вело 39...f4+! 40. ♖:f4 ♗:f4+ 41. ♔:f4 ♖f7+, оставаясь с лишним качеством.

40. ♘d3? Смыслов тоже находится в цейтноте и допускает ответный промах. При 40. ♖:f5! ♖:f5 41. ef ♗:h2+ 42. ♗e4 ♗g3 43. ♘e6 ♗:e4 44. ♔:e4 ♗:h4 позиция оставалась довольно острой. Теперь слоны черных оживают, и дальнейшую часть партии Решевский проводит безукоризненно.

40... ♗b8! 41. e5 ♗a7+ 42. c5 ♗e4 43. ♔f4 ♗b8 44. ♖e1 ♖d8 45. ♔e3?! Ускоряет развязку **45... ♗a7 46. ♖d2 ♖d5 47. ♖ed1 ♗:d3 48. ♖:d3 ♖:e5+ 49. ♔d2 ♗:c5 50. ♔c1 f4 51. ♖d5 ♖:d5 52. ♖:d5 ♗e3 53. ♔d1 f3 54. ♗d3 ♗f4 55. ♖:a5 ♗h2.** Потеря пешки «h» равносильна капитуляции. **56. ♖a6 ♔g7 57. ♖g6 ♔f8 58. ♗c4 ♖d7 59. ♔c2 g3 60. ♖f6 ♔g7. Белые сдались.**

Поразительно, что эта победа, последняя в жизни знаменитого шахматиста (через несколько месяцев он умер), была зафиксирована в тот момент, когда на его часах оставалась одна секунда.

До сих пор речь шла о механических шахматных часах. Однако в современных соревнованиях все чаще применяются электронные часы – без стрелок, флажков, но с цифровой индексацией. Циферблат показывает реальное время, оставшееся в распоряжении игрока. Цифры 0.00 равносильны падению флажка на механических часах – игрок просрочил время и проиграл партию.

Новый поворот в истории шахматных часов связан с именем Роберта Фишера. Хотя сам он не играет более тридцати лет, две его идеи оказались весьма плодотворны; одна связана с изменением шахматных правил, другая – с преобразованием электронных часов (о шахматах Фишера мы расскажем позднее).

Суть фишеровских часов состоит в том, что с определенного момента (иногда с самого начала партии) после каждого хода игроку добавляются дополнительные секунды, например две или пять в блице, десять или больше в быстрых шахматах и тридцать в классических. Дело в том, что шахматист, имея огромный материальный перевес, нередко проигрывает из-за просрочки времени. Одно дело, когда вы не в состоянии разобраться в сложной позиции и в итоге у вас падает флажок, и совсем другое, когда вы чисто физически не успеваете объявить мат партнеру – логика событий нарушается глупо и обидно. Разумеется, игрок, матуя одинокого короля соперника, никак не должен просрочить время. Часы Фишера как раз и решают эту проблему. Получая дополнительные секунды после каждого хода, вы всегда успеете поставить мат, и нелепый финал исключается.

Да, плохо, когда остается мало времени подумать. В блице и в быстрых шахматах падение флажка встречается постоянно, но в классической игре это происходит редко: чаще цейтнот ведет к тяжелым ошибкам и просчетам и, как следствие, к обидным поражениям. Но иногда шахматист так увлечен позицией на доске, что забывает обо всем на свете, в том числе и о часах, и сообщение судьи о просрочке времени становится для него холодным душем.

Единственный случай падения флажка в поединке за шахматную корону произошел в 1958 году. В матче-реванше Смыслов – Ботвинник после 14 партий Ботвинник вел 9:5, а 15-я партия была отложена в лучшем для него положении. При доигрывании экс-чемпион мира сохранял все шансы на победу, и оставалось сделать всего два хода до следующего контроля. И тут Михаил Моисеевич глубоко задумался, чтобы найти четкий путь реализации преимущества, и начисто забыл про часы (между тем, любой его ход сохранял перевес). Каково же было изумление Ботвинника, когда главный судья шведский гроссмейстер Г.Штальберг подошел к столику, остановил часы и засчитал ему поражение. Вместо возможного 10:5 счет стал 9:6, и Ботвиннику пришлось еще потрудиться, чтобы довести поединок до победного конца.

Е.Гик

Индекс
70465 – по каталогу "Роспечать"

Физики и математики на монетах мира

Портрет испанского морского офицера, путешественника и естествоиспытателя Хорхе Хуана де Сантасилья, а также ряд фрагментов его картографических наблюдений представлены на обороте испанской банкноты достоинством в 10000 песет. Дополняют композицию роза ветров и набросок фрегата, пересекающего бурное море. На лицевой стороне банкноты представлен портрет короля Испании Хуана Карлоса I.

(Подробнее о Хорхе Хуане де Сантасилья – внутри журнала.)